WBA0245_v2.5
Métodos Quantitativos de Apoio à Decisão

Métodos Quantitativos de Apoio à Decisão

Autoria: Rafael Bichone

Leitora Crítica: Leticia Silveira Artese

Como citar este documento: BICHONE, Rafael. *Métodos Quantitativos de Apoio à Decisão.* Valinhos: 2017.

Sumário

Apresentação da Disciplina	03
Unidade 1: Estatística Descritiva	04
Unidade 2: Medidas de posição, medidas de variação, medidas de forma e Box-Plot	27
Unidade 3: Probabilidade	64
Unidade 4: Métodos de estimação	92
Unidade 5: Testes de hipóteses, regressão linear e correlação	118
Unidade 6: Modelagem matemática para tomada de decisão, conceitos de Programação linear	149
Unidade 7: Aplicação do solver do Excel para otimizar modelos de programação linear	174
Unidade 8: Método multicritério de apoio a decisão, caso de avaliação da escolha de um fornecedor	207

Apresentação da Disciplina

A cada dia que passa, mais e mais dados são gerados, e assim, mais variáveis devem ser agregadas ao elaborar uma estratégia. A fim de criar um plano que traduza bem a realidade. A atual dinâmica dos mercados, consequente da globalização, apresenta uma maior complexidade levando à necessidade de avaliação de vários cenários, indicadores e correlações para melhorar os processos de tomadas de decisões. De outro modo, a proliferação de recursos computacionais, tanto em termos de *hardware* como em termos de *softwares*, possibilita o manuseio e o processamento de uma quantidade maior de dados a fim de extrair o máximo de informações possíveis para melhor conduzir as decisões. Com a dispersão da tecnologia, temos um número cada vez maior de pessoas com acesso às ferramentas de análise sofisticadas, permitindo aos gestores realizarem diversas análises em um curto espaço de tempo. Entretanto, de nada valem os softwares e os dados se não soubermos manuseá-los corretamente para obtermos informações válidas e concretas. Deve ficar claro que dados e informação são coisas diferentes. O dado por si só não representa nada, é necessário trabalhar esse dado para se chegar na informação que seja útil para o negócio. Nesta disciplina iremos aprender conceitos estatísticos e apresentar um conjunto de ferramentas utilizadas para tomadas de decisões nas empresas.

Unidade 1

Estatística Descritiva

Objetivos

1. Apresentar aos alunos os conceitos básicos e as etapas iniciais de análise para descrever e resumir as informações contidas nos dados obtidos através de pesquisa ou observações de campo.

Introdução

Durante uma eleição, diversos institutos de pesquisa coletam periodicamente a opinião dos eleitores para estimar a intenção de voto da população e assim prever quais serão os resultados da eleição. Mas a pergunta é: esses institutos fazem a pesquisa com todos os eleitores?

É claro que não! Mesmo que a pesquisa fosse realizada pela internet, seria um trabalho enorme e demoraria muito tempo para ser feito. O que eles fazem então?

Neste tema você será apresentado ao processo de levantamento estatístico e a conceitos básicos da estatística. Sendo capaz, ao final deste tema, de compreender como os institutos de pesquisas coletam a opinião de uma **amostra** da população, usam técnicas de **Estatística Descritiva** para organizar e resumir os dados e fazem **inferências** a partir das informações obtidas para estimar a opinião de toda a população.

1. O que é estatística

A Estatística está presente nas diversas etapas da pesquisa, desde o seu planejamento até a interpretação de seus resultados. Não se resume, portanto, como sendo apenas um conjunto de técnicas para exibir tabelas e gráficos. A Estatística vai muito além disso. Sendo então a Estatística a ciência que estuda como coletar, organizar, analisar e interpretar os dados.

A análise estatística por sua vez, pode ser uma **Estatística Descritiva** (Dedutiva) ou uma **Inferência Estatística** (estatística In-

dutiva). A análise descritiva tem como objetivo descrever e analisar certa população, sem pretensão de tirar conclusões sobre hipóteses. Por sua vez, a análise inferencial, é a parte da estatística que se baseia em resultados obtidos a partir de uma amostra, para inferir, induzir ou estimar fenômenos da população da qual a amostra foi retirada. Também, através da Estatística Indutiva, podemos aceitar ou rejeitar hipóteses que podem surgir sobre as características da população (MARTINS; DONAIRE, 2012).

Os Métodos Estatísticos, então, são um conjunto de técnicas que vão desde:

1) Delineamento do experimento: quais são meus objetivos? O que pretendo observar ou medir? São estas características que vão determinar minhas variáveis.

2) Coleta dos dados: quem é minha população? E minha amostra? De que forma esses dados serão coletados? Essas características definem o meu tipo de estudo.

3) Processamento dos dados: que tipos de dados eu tenho? Como ordená-los para melhor visualização? Que estatísticas devo extrair? Conhecimento de conceitos estatísticos são importantes nessa etapa.

4) Análise: Análises Descritivas? Análises Inferenciais? O que essas estatísticas significam no meu contexto? Essa é a informação que conseguimos obter para satisfazer nosso objetivo.

5) Disseminação dos resultados: de que maneira posso exibir meus resultados? Quais gráficos ou tabelas utilizar? Etapa importante para expressar corretamente a informação que se deseja.

Para saber mais

Alguns tipos de Estudos conhecidos são:

Observacionais – quando não se exerce controle sobre a coleta (observação passiva); Ex.: estudos médicos, quando não se pode aplicar certo tratamento a um indivíduo por motivos éticos.

Experimentais – quando a extração dos dados é controlada (mediante aleatorização); Ex.: ensaios clínicos.

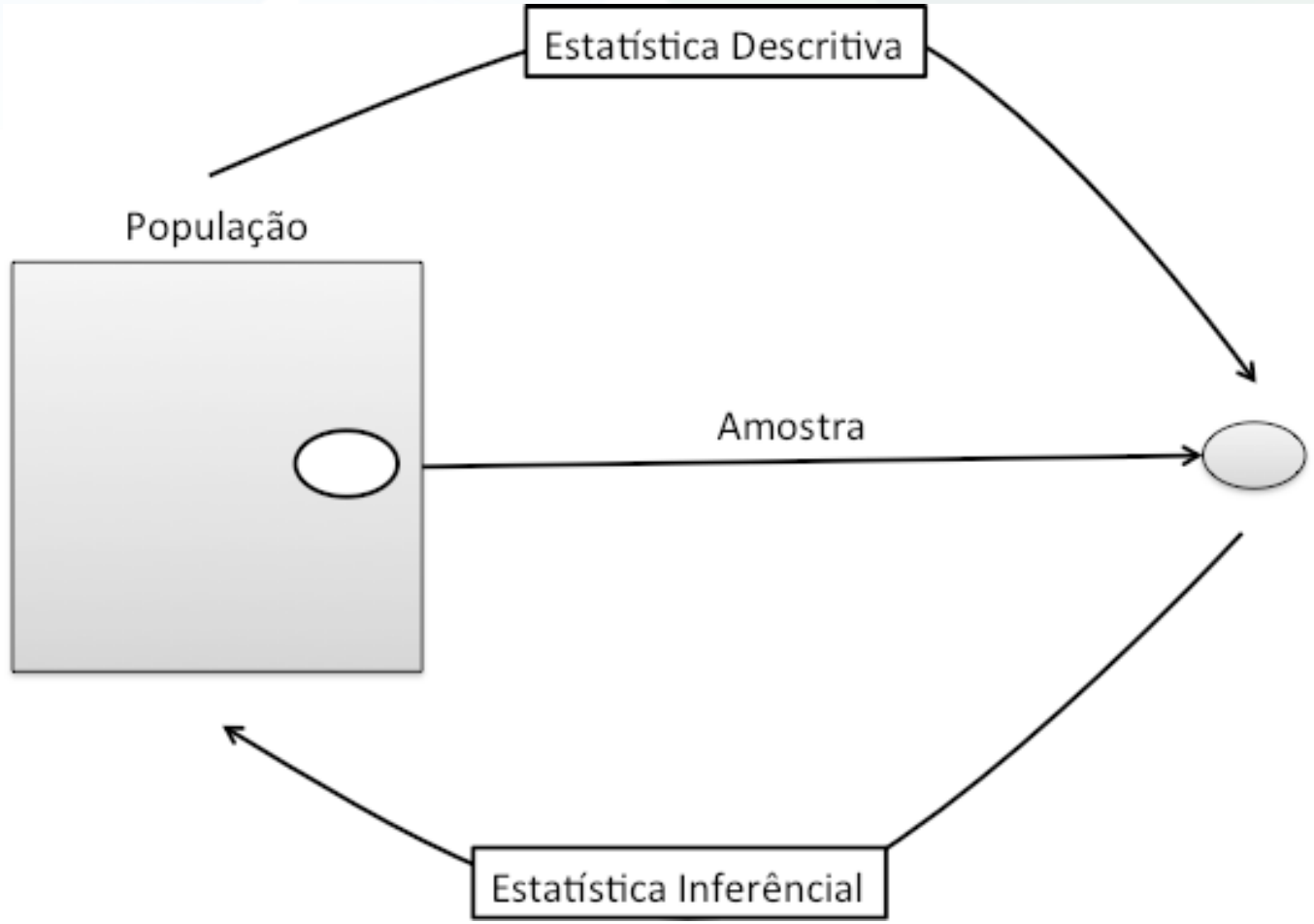
Amostrais – quando os dados são extraídos a partir de uma amostra obtida de uma população bem definida. Ex.: pesquisa eleitoral.

2. Tipos de variáveis e suas classificações

Os dados obtidos, bem como as características dos eleitores que responderam à pesquisa, são denominados de **Variáveis.** Portanto **Variável** é qualquer característica a ser medida em cada elemento da amostra associada a uma população.

Por exemplo, quando dizemos "idade e estado civil das mulheres residentes de um mesmo país". Entendemos 'Idade' e 'Estado Civil' como duas características, ou seja, dois tipos de variáveis associadas a cada elemento da amostra. Isto é, cada pessoa que compõe minha amostra, que é definida pelo subgrupo de pessoas do sexo feminino residentes de um mesmo país. Obtida a partir da população que seriam todas as pessoas residentes de um mesmo país.

Figura 1: Esquema ilustrativo de uma População e Amostra e suas relações com as técnicas de Estatística Descritiva e Inferencial.



Fonte: elaborada pela autora segundo Martins e Donaire (2012).

Assim podemos trazer as seguintes definições:

População: um conjunto (finito ou não) de elementos que tem pelo menos uma característica em comum.

Amostra: um subconjunto de elementos de uma população.

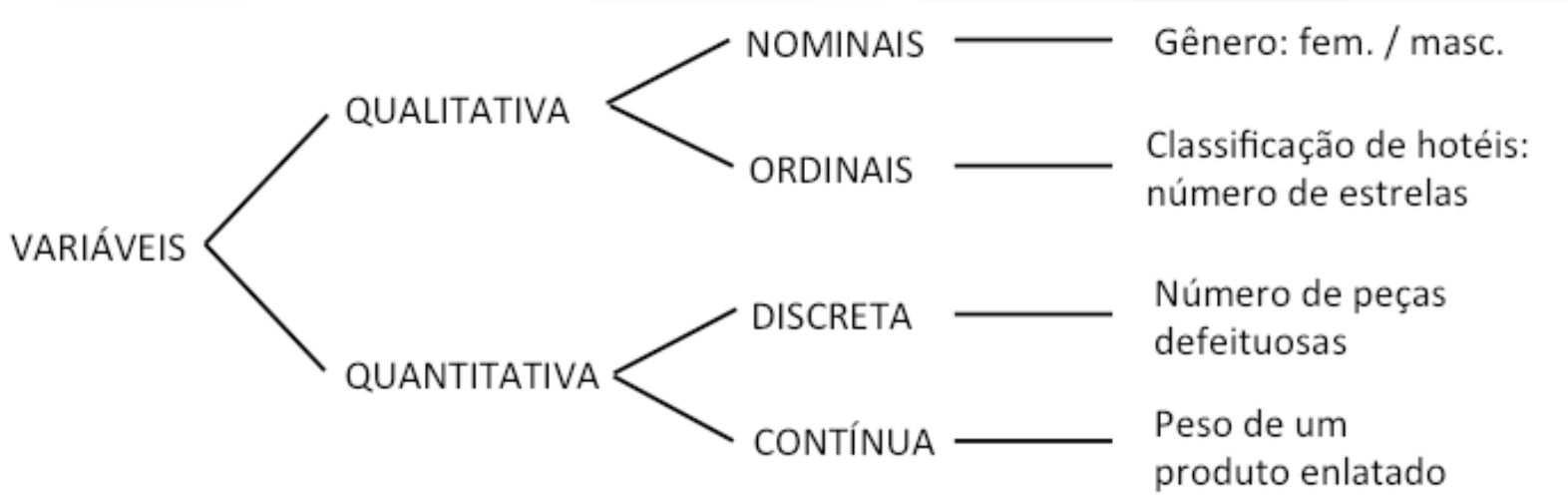
Elemento: componente sobre o qual serão observadas ou medidas as características. Onde cada característica corresponde a um tipo de variável.

Para saber mais

As medidas relacionadas à População são denominadas **parâmetros**. E as medidas relacionadas à Amostra são chamadas **estatísticas** Para cada parâmetro populacional existe um parâmetro amostral correspondente, o qual se espera que aponte como uma boa aproximação do primeiro, desde que a amostragem seja adequadamente conduzida e que o tamanho da amostra seja bem dimensionado (LOESCH, 2015).

Estas variáveis, características que estamos interessados em investigar, podem ser classificadas de acordo com seu tipo, sendo eles:

Figura 2: Organização dos tipos de variáveis e alguns exemplos



Fonte: elaborada pela autora segundo Loesch (2015).

Saber classificar a variável é importante para saber qual técnica estatística utilizar. É importante ter clareza sobre o tipo de dado que estamos manipulando:

- **Qualitativos** ou também chamados **Categóricos**: representam um atributo ou categoria da variável, que pode ser **nominal** (também chamado não ordinal), pois não apresentam

sentido de ordem entre elas. Ou **ordinal** onde existe uma ordem de relação pré-estabelecida.

- **Quantitativos** descrevem características numéricas, utiliza-se a escala de intervalo ou razão. Dados **discretos** assumem valores inteiros, um número finito de observações. Dados **contínuos** podem assumir qualquer valor real em certo intervalo, tomando uma infinidade de valores.

Para saber mais

Para definir uma variável é bom ter em mente o conceito de **Definição Operacional**. Ou seja, para ter certeza que quando definir uma variável todos saibam exatamente do que se trata. Sem definições precisas sobre como medir uma variável, diferentes pessoas podem chegar a diferentes resultados. Por exemplo, antes de pedir que meçam o número de peças defeituosas é necessário definir, segundo critérios bem estabelecidos, o que seja uma peça defeituosa.

3. Amostragem

Como já foi mencionado, o termo população refere-se a um conjunto de elementos com uma determinada característica em comum observável, e o termo amostra refere-se a um subconjunto dessa população. Uma amostra deve ser representativa de sua população. Para garantir tal correspondência, existem técnicas para selecionar os elementos da população que irão compor esta amostra. Esta precaução com a **Amostragem** é importante para que não exista tendenciosidade (o mesmo que viés) na amostra, ou seja, uma distorção entre a variável estatística e o valor real a estimar.

Para saber mais

Por exemplo, se quisermos estimar a intenção de voto a nível presidencial no país. Não podemos levar em consideração apenas a opinião de homens do estado de São Paulo. Esta amostra seria tendenciosa. Entretanto se o intuito fosse estimar a intenção de voto para prefeitura da cidade, talvez fosse uma amostra significativa. Observe, portanto, a importância de se atentar para todo o processo do método estatístico para atingir um resultado significativo. Nenhuma técnica estatística é capaz de corrigir uma amostra mal coletada!

As técnicas de amostragem são essenciais para a realização de uma pesquisa. É necessário estar atento aos objetivos e as limitações do estudo. Nem sempre teremos acesso à população ou aos dados que gostaríamos, por questões de tempo, financeira ou acessibilidade, mas podemos definir uma amostra que seja representativa para nossa pesquisa. As técnicas de amostragem podem ser divididas em **Probabilísticas** e **Não-probabilísticas**. Ou seja, Amostragem Probabilística ocorre quando os elementos tem chances iguais de serem selecionados para compor a amostra (mecanismos aleatórios de seleção) ou Amostragem Não-probabilística quando os elementos são escolhidos propositalmente para compor a amostra (mecanismos não-aleatórios de seleção). Na tabela 1 podemos conferir algumas técnicas de amostragem conhecidas.

Tabela 1: Quadro apresentando as técnicas de amostragem e seus exemplos

PROBABILÍSTICA	Amostragem aleatória simples	São realizados sorteios nos quais todos os elementos tem a mesma probabilidade de ser selecionado como elemento da amostra. (pode ou não haver reposição)	Selecionar 5 alunos de uma sala por sorteio e verificar a nota da prova.
	Amostragem sistemática	Apenas o primeiro elemento é sorteado, os demais elementos são selecionados de maneira espaçada, segundo um intervalo fixo. É utilizada quando os elementos estão organizados de maneira aleatória.	Em uma fila de itens produzidos seleciona-se um item para revisão a cada 50 produzidos.
	Amostragem estratificada	Técnica indicada quando a população é heterogênea, subdividindo em grupos distintos homogêneos, denominados estratos. Dentro de cada estrato é realizada uma amostragem aleatória simples. (Estratificações comuns são, por exemplo: classe social, idade e gênero).	Dentre 1.000 crianças 700 são meninas e 300 são meninos. Serão selecionadas 50 crianças de cada gênero para uma pesquisa sobre chiclete.
	Amostragem de conglomerados	Técnica indicada em populações que apresentam muitos subgrupos e quando fica difícil extrair uma amostra de cada subgrupo. Os conglomerados são escolhidos aleatoriamente.	Uma cidade é dividida em 40 bairros. Para uma pesquisa de satisfação da prefeitura foram escolhidos 4 bairros para serem entrevistados.

NÃO-PROBABILÍSTICA	Amostragem por julgamento	Consiste em obter os elementos da amostra de modo intencional através da escolha pelo julgamento de um especialista.	Para uma pesquisa sobre qualidade de ensino em uma universidade, o pesquisador resolve considerar somente os professores que estão há mais tempo no corpo docente, julgando que assim obteria respostas mais satisfatórias no assunto.
	Amostragem por conveniência	Consiste em obter os elementos da amostra por facilidade e disposição.	Em uma feira empresarial foi anunciado no autofalante para 10 pessoas se voluntariarem para um teste de mercado.

Fonte: elaborada pela autora segundo Loesch (2015).

Algumas considerações devem ser chamadas a atenção quando trabalhamos com amostragem. Como os conceitos de Erro Amostral e Erro não-Amostral. O erro amostral é uma variação esperada entre o valor da estatística encontrada na amostra e o valor da população. Já os erros não-amostrais são vieses causados por amostras mal delimitadas (tendenciosas como mencionado anteriormente), dados coletados incorretamente, instrumentos de medição defeituosos, entre outros. O erro não-amostral idealmente não deve ocorrer, por isso deve-se planejar a pesquisa para que sejam minimizados.

Glossário

Erro Amostral: variação encontrada entre a estatística calculada na amostra e o valor da população.

Inferência: generalização de estimativas e comparação de hipóteses.

Variável: característica a ser medida em cada elemento da amostra.

Variável Discreta: variável que só pode assumir valores inteiros, ex.: nº de filhos.

Questão para reflexão

Ter dados não é o mesmo que ter informações. Sendo assim, quais são as melhores ferramentas para se organizar os dados coletados?

Considerações Finais

- É essencial para uma boa pesquisa estar atento a todas as etapas de um método estatístico: escolha das variáveis, tipo de dados e técnica de amostragem;
- Estatística Descritiva e Inferência Estatística. A primeira diz respeito a uma amostra (estatísticas), enquanto a segunda expande as considerações para a população (parâmetros).
- Saber diferenciar os dois principais tipos de variáveis: Qualitativas e Quantitativas. Assim como os conceitos de População e Amostra.
- Entender a diferença entre técnicas probabilísticas e não-probabilísticas de amostragem. Quando os elementos de uma amostra são selecionados de maneira aleatória ou não.
- Considerando uma Amostragem Probabilística Aleatória Simples: se o tamanho da população é N, todos os elementos da população devem ter a mesma probabilidade 1/N de serem selecionados.

Referências

LOESCH, Claudio. **Probabilidade e estatística.** Rio de Janeiro: Ltc — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2015.

MARTINS, Gilberto de Andrade; DONAIRE, Denis. **Princípios de estatística.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

WALPOLE, R., MYERS, R. H. **Probabilidade e estatística**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009.

Questão 1

1. Na estatística, são denominadas variáveis:

a) tudo que muda ou sofre alteração.

b) todos os elementos de uma população.

c) todos os elementos de uma amostra.

d) qualquer característica associada a uma população.

e) tudo que pode ser inferido probabilisticamente.

Questão 2

2. As variáveis podem ser classificadas das seguintes formas:

a) prováveis e não-prováveis.

b) qualitativas e quantitativas.

c) probabilística e não-probabilísticas.

d) numeráveis e não-numeráveis.

e) críticas e comuns.

Questão 3

3. É um exemplo de uma variável qualitativa ordinal:

a) o gênero dos entrevistados.

b) a cor dos olhos dos entrevistados.

c) a cor dos cabelos dos entrevistados.

d) a idade dos entrevistados.

e) a classe social dos entrevistados.

Questão 4

4. Um bom exemplo de uma variável contínua é:

a) o peso.

b) o número de veículos.

c) a quantidade de filhos.

d) o total de imóveis.

e) a cor dos olhos.

Questão 5

5. Na amostragem aleatória simples com reposição:

a) cada elemento da população pode ser selecionado uma única vez.

b) um mesmo elemento da população pode ser selecionado mais de uma vez.

c) a amostra só pode ser selecionada uma vez.

d) cada estrato da população é escolhido de cada vez.

e) não se sabe, pois é obra do acaso.

Gabarito

1. Resposta: D.

Variável é uma característica a ser medida em cada elemento que compõe a população. Sendo a população um conjunto de elementos que possui características em comum.

2. Resposta: B.

Elas podem ser de dois tipos: qualitativa, quando as variáveis são atributos, ou quantitativas, quando as variáveis são numéricas.

3. Resposta: E.

São variáveis qualitativas ordinais aquelas que são estipuladas critérios de ordem entre elas.

4. Resposta: A.

Variáveis quantitativas contínuas podem assumir uma infinidade de valores dentro de um intervalo. Por exemplo, o peso de uma pessoa pode variar em pequenas frações de gramas.

5. Resposta: B.

Quando há reposição, ou seja, o elemento é reposto à população mesmo que já tenha sido selecionado anteriormente para compor a amostra. Portanto, este elemento pode ser selecionado diversas vezes para compor uma mesma amostra.

Unidade 2

Medidas de posição, medidas de variação, medidas de forma e Box-Plot

Objetivos

1. Apresentar aos alunos as diversas medidas de posição e variação que podem ser extraídas das variáveis quantitativas: a média, mediana, moda, quartis, amplitude, variância e desvio-padrão. Além do formato da distribuição e como construir e analisar um Box-Plot.

Introdução

Após o delineamento da pesquisa e da coleta e organização dos dados, a questão principal é descrever os dados obtidos. Mas como podemos realizar esta descrição? Quando temos dados **Qualitativos** resumem-se os dados por determinar a frequência de cada uma das categorias observadas e apresentá-las em uma tabela ou gráfico. Mas quando temos dados **Quantitativos**, podemos sintetizar o conjunto de dados em valores numéricos. As duas principais medidas que descrevem os dados são as **Medidas de Tendência Central** (posição) e as **Medidas de Dispersão** (variabilidade), ou seja, são valores representativos que permitem obter informações a respeito do modo como os dados se distribuem. Portanto o pesquisador passa a analisar as diversas maneiras de tendência que um determinado conjunto de dados pode apresentar para, assim, poder começar a tirar as primeiras conclusões sobre as informações contidas nos dados coletados.

1. Medidas De Tendência Central

A maioria dos dados coletados, seja de uma população ou de uma amostra, apresenta uma tendência de se distribuírem em torno de um valor central. Essa tendência é conhecida pela maioria das pessoas quando querem se referir ao valor mais frequente, ou quando dizem “em média”. Quando isso ocorre, elas estão se referindo às medidas de tendência central dos dados obtidos. Entretanto não temos somente a média como

medida de centralidade dos dados. Na verdade, veremos que nem sempre a média é a melhor forma de representar o dado mais frequente em um conjunto de dados.

Para saber mais

É importante estar atento ao trabalhar com medidas de posição para que o conjunto de dados esteja sempre ordenado! Em estatística um conjunto de dados ordenados de forma crescente ou decrescente é chamado **ROL**! (LOESCH, 2015; MARTINS; DONAIRE, 2012).

1.1 Moda

A moda, representada por *Mo*, é o valor ou valores que ocorrem com maior frequência. Em um rol, a moda é localizada rapidamente observando o valor que mais se repete. Dessa forma, um conjunto de dados pode não apresentar moda ou ter mais de uma moda:

Amodal: rol que não tem nenhum valor que se repete;

Bimodal: existem 2 valores que se repetem na mesma frequência;

N-modal: existem n valores que se repetem na mesma frequência.

Exemplo 1:

A) Considere o conjunto de dados {4,2,5,2,2,1,2,3,6,5} que representa a frequência com que dez entrevistados disseram ir à academia na semana.

Primeiro ordenamos os dados de forma crescente, para obter o rol:

[1 2 2 2 2 3 4 5 5 6]

Deste modo fica claro obter a **Moda** *Mo=2* é o valor mais frequente, o que mais se repete.

B) Considere o conjunto das idades de seis alunos {21,23,19,17,28,20}. Temos um conjunto **Amodal**, pois não há nenhuma idade que se repete ou, em outros termos, todas as idades têm a mesma frequência.

C) Considere agora o rol das idades dos professores:

[29 31 35 39 39 40 43 44 44 52]

Temos um conjunto **Bimodal**, pois os valores 39 e 44 se repetem 2 vezes cada.

1.2 Média Aritmética

A média aritmética é comumente conhecida apenas como **média** pela maioria das pessoas, sendo também a medida de tendência central mais usada. Normalmen-

te nos referimos a ela como um “ponto de equilíbrio” do conjunto de dados, representando a razão entre a soma e o número de observações.

Para calcular a **Média Aritmética**, representada por $\bar{x}$, basta somar todos os valores de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ e dividir pela quantidade n do número de elementos desse conjunto, como mostra a Equação 1:

Equação 1: Cálculo de Média Aritmética

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Onde:

$\bar{x}$ = média do conjunto;

x_i = valor de cada elemento do conjunto;

n = número de elementos do conjunto.

Exemplo 2:

Considere novamente o conjunto das idades dos seis alunos {21,23,19,17,28,20}. A média de idade dessa turma é calculada da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{21 + 23 + 19 + 17 + 28 + 20}{6} = \frac{128}{6} = 21{,}33\ anos$$

Para saber mais

A Média Aritmética Simples não é a única forma de se calcular a média de um conjunto de dados. Temos também a Média Ponderada, Média Geométrica e Média Harmônica. Procure saber quais são as vantagens e desvantagens de cada técnica e associe com as características particulares do conjunto de dados para obter uma análise mais objetiva das informações a serem concluídas a partir dos dados.

1.3 MEDIANA

A mediana é o valor central dos dados. Essa medida separa exatamente na metade os dados, ou seja, à esquerda da mediana os dados são menores ou iguais à mediana, e à direita da mediana os dados são maiores ou iguais à mediana. Para calcular a **Mediana** é estritamente essencial que os dados estejam ordenados. Lembre-se do **Rol**!

Para determinar a posição da Mediana, P_{Md}, entre os dados ordenados, deve ser usada a Equação 2:

Equação 2: Cálculo da Posição da Mediana entre os dados ordenados

$$P_{Md} = \frac{n+1}{2}$$

E para determinar o valor da Mediana, Md, irá depender se o número de elementos do conjunto $\boldsymbol{n}$ é par ou ímpar:

- para n par: a mediana será a média aritmética dos dois valores que ocupam a posição central dos dados ordenados.
- para n ímpar: a mediana será o valor central dos dados ordenados.

Exemplo 3:

a) Considere novamente o conjunto de dados {4,2,5,2,2,1,2,3,6,5} que representa a frequência com que dez entrevistados disseram ir à academia na semana.

Primeiro obtemos o rol: [1 2 2 2 **2** **3** 4 5 5 6]

A posição da mediana será: $P_{Md} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$

ou seja, a mediana está entre o 5º e o 6º elemento do rol.

E como $n = 10$ é par, seu valor será a média aritmética dos valores que se encontram nestas posições: $Md = \frac{x_5+x_6}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$

Isso significa que metade das pessoas vai menos de 2,5 vezes na academia e metade vai mais de 2,5 vezes na academia por semana.

b) Considere os valores das primeiras quinze doações que uma instituição de caridade recebeu em um evento {10,55,20,60,15,50, 75,50,200,25,50,70,50,40,800}.

Rol: [10 15 20 25 40 50 50 **50** 50 55 60 70 75 200 800]

A posição da mediana será: $P_{Md} = \frac{15+1}{2} = 8$

ou seja, a mediana se encontra na 8º posição dos elementos ordenados.

E como n é ímpar, seu valor será o valor do elemento central, que no caso se encontra na oitava posição: $Md = x_8 = 50$

Para saber mais

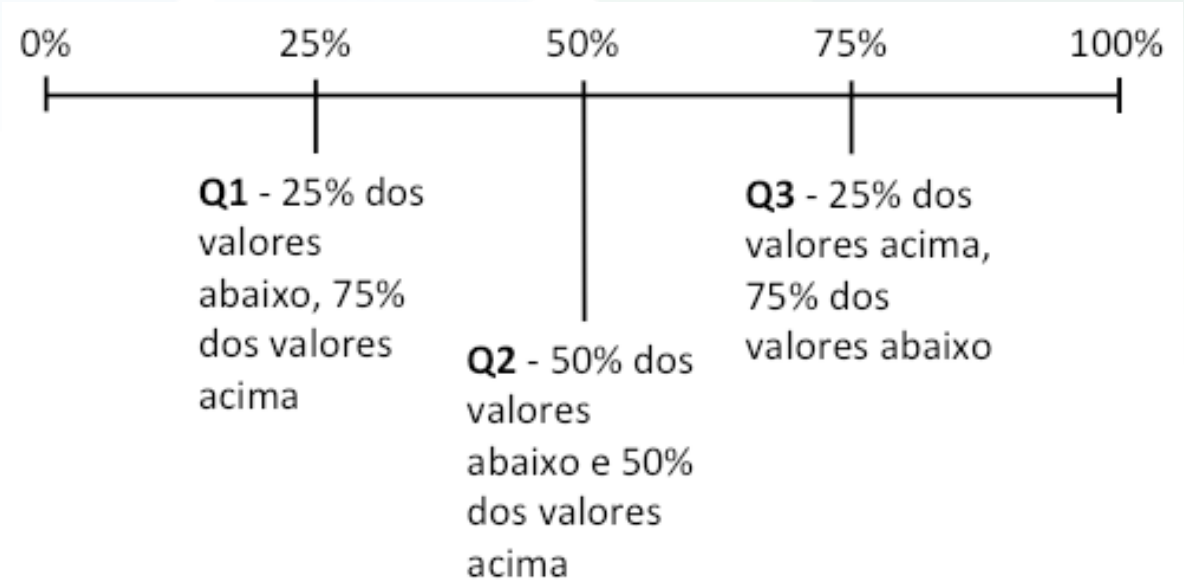
A **Média** e a **Mediana** são duas medidas alternativas de centralidade. Entretanto, se os dados se distribuem de forma razoavelmente simétrica em torno do centro, a Média é próxima da Mediana, caso contrário a Média difere da Mediana. A medida de centralidade a ser usada dependerá do objetivo do estudo!

Dica: calcule a média para cada um dos exemplos das medianas e observe o que acontece! No primeiro exemplo temos a média e a mediana relativamente próximas. Enquanto que para o segundo exemplo, a média e a mediana diferem bastante!

1.4 QUARTIL

Às vezes, dependendo da intenção da pesquisa, medidas de centralidade não são suficientes para buscar a informação que se deseja. Por isso, uma das medidas de localização de dados utilizada em alguns estudos são os **Quartis**. Os quartis dividem um conjunto de dados em quatro partes iguais:

Figura 3: Representação dos Quartis



Fonte: elaborada pela autora a partir de Martins e Donaire (2012).

Quartis são casos particulares, medidas mais comuns e usadas, dos **Percentis**. Sendo o Quartil 1 (Q1 = 25º percentil), a mediana (Q2 = 50º percentil) e o Quartil 3 (Q3 = 75º percentil).

Percentil é uma fórmula que faz distribuições de porcentagem dos dados ao longo do conjunto ordenado:

Equação 3: Calculo da Posição dos Quartis entre os dados ordenados

$$K = \frac{p\,(n+1)}{100}$$

Onde, K é a posição do dado no rol, p o percentil desejado e n o tamanho do conjunto.

De tal forma que, o Quartil 1 (ou quartil inferior), é definido como a mediana dos 50% menores valores, ou seja, divide o conjunto de dados ordenados, em 2 subconjuntos: 25% abaixo do quartil 1 e 75% acima. O Quartil 3 (ou quartil superior), por sua vez, é definido pela mediana dos 50% maiores valores, ou seja, divide o conjunto de dados, ordenados, em 2 subconjuntos: 75% abaixo do quartil 3 e 25% acima. E o Quartil 2 coincide com a mediana do conjunto, valor que divide o conjunto de dados em dois subconjuntos iguais; 50% dos valores estão abaixo do Q2 e 50% dos valores estão acima do Q2 (MARTINS; DONAIRE, 2012).

EXEMPLO 4:

Considere o conjunto de dados que representa a expectativa de vida em onze cidades brasileiras diferentes {70,59,72,71,76,62,74,68,72,65,78}

Se estamos interessados em saber qual a expectativa de vida relativa à parcela dos 25% menores dados. Estamos interessados em saber qual o valor Q1 do primeiro quartil. Sabemos que Q1 corresponde ao 25º percentil, portanto calculamos:

$$K = \frac{25\ (11+1)}{100} = \frac{12}{4} = 3$$

ou seja, Q1 se encontra na 3º posição dos elementos ordenados.

Q1 = 65

Isso significa que 25% dessas onze cidades analisadas têm expectativa de vida menor que 65 anos.

Agora, caso estivermos interessados em saber qual a expectativa de vida relativa à parcela dos 25% maiores dados. Estamos interessados em saber qual o valor Q3 do terceiro quartil. Sabemos que Q3 corresponde ao 75º percentil, portanto calculamos:

$$K = \frac{75\ (11+1)}{100} = \frac{3 \times 12}{4} = 9\ ,$$

ou seja, Q3 se encontra na 9º posição dos elementos ordenados.

Q3 = 74

Isso significa que 25% dessas onze cidades analisadas têm expectativa de vida maior que 74 anos.

Isso significa que 25% dessas onze cidades analisadas têm expectativa de vida maior que 74 anos.

59 62 **65** 68 70 **71** 72 72 **74** 76 78

Q1. 25% dos valores abaixo, 75% dos valores acima

Q2. 50% dos valores abaixo e 50% dos valores acima

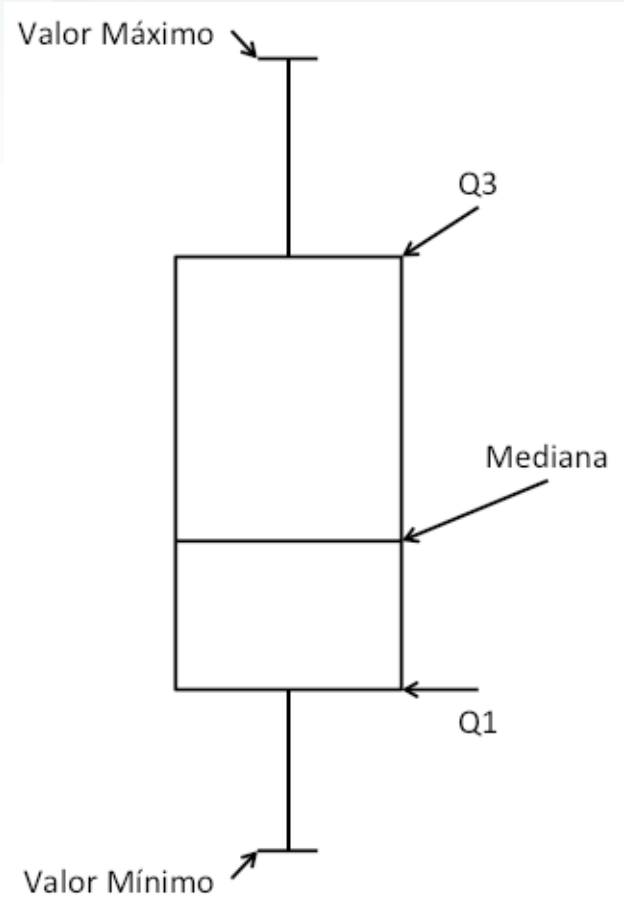
Q3. 25% dos valores acima, 75% dos valores abaixo

Essas informações podem estar atreladas ao fato dos dados que representam Q3, e estão 25% acima, estarem associados às cidades em regiões que apresentam melhor qualidade de vida e infraestrutura. E os dados que representam Q1, e estão 25% abaixo, estarem associados às cidades em regiões menos desenvolvidas. Podemos reparar neste exemplo como a mediana dos 50% menores valores (Q1=65) é quase 10 anos a menos que a mediana dos 50% maiores valores (Q3=74). Para uma pesquisa que fosse direcionar políticas sociais de amparo ao idoso no país esta informação seria de extrema relevância, ao invés de tratar todos os lugares se baseando na média que seria ($\bar{x} = 69{,}7\ anos$).

2. CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE BOX-PLOT

O box-plot, é uma maneira gráfica de descrever uma distribuição de dados numéricos e suas medidas. A construção do Box-Plot, ou também conhecido por Diagrama de Caixa, parte da análise de **cinco números**: **Valor Mínimo** da distribuição, o **Primeiro Quartil** (Q1), a **Mediana**, o **Terceiro Quartil** (Q3) e o **Valor Máximo** da distribuição. Como pode ser visto na Figura 4:

Figura 4: esquema de um diagrama box-plot



Fonte: Elaborada pela autora

Etapas para construir o diagrama Box-Plot:

- 1) Calcular a Mediana, o primeiro e terceiro Quartil.
- 2) Desenhar uma caixa, na qual a base da caixa representa o quartil inferior (Q1) e o topo da caixa representa o quartil superior (Q3) e dentro da caixa localiza–se a mediana. Logo, a altura da caixa é a amplitude interquartil (AIQ = Q3 – Q1). Portanto, a caixa representa 50% de todos os valores observados, concentrados na tendência central, eliminando 25% dos menores valores e 25% dos maiores valores (75% - 25% = 50%).
- 3) Traçar os segmentos de reta que representam os limites da distribuição, ou seja, os valores mínimo e o máximo da distribuição. Sendo dois segmentos de reta, um que liga o topo da caixa ao maior valor observado e outro que liga a base da caixa ao menor valor observado.

O box-plot é uma forma rápida de examinar características como: simetria, pontos extremos atípicos, centralidade, quantidade de variação, mínimo e máximo. Na tabela 2 podemos ver algumas comparações entre os tipos de distribuição:

Tabela 2: relação entre as medidas e o formato da distribuição.

Tipo de distribuição	Comparação		
	Valor Mínimo até Mediana Vs. Mediana até Valor Máximo	Valor Mínimo até Q1 Vs. Q3 até Valor Máximo	Q1 até Mediana Vs. Mediana até Q3
Assimétrica à esquerda	Maior	Maior	Maior
Simétrica	Igual	Igual	Igual
Assimétrica à direita	Menor	Menor	Menor

Fonte: Walpole e Myers (2009)

EXEMPLO 6:

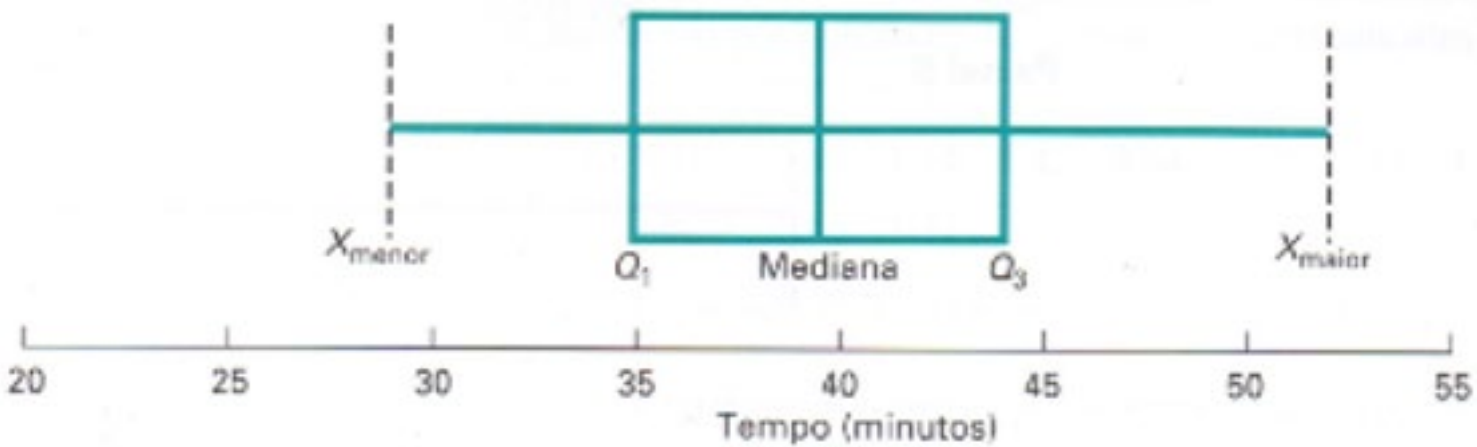
Uma pessoa mediu o tempo necessário para arrumar-se pela manhã e ir ao trabalho, e obteve os seguintes dados:

- Menor tempo: 29 minutos
- 1º quartil: 35 minutos

- Mediana: 39,5 minutos
- 3º quartil: 44 minutos
- Maior tempo: 52 minutos

Pôde-se construir um box-plot e verificar que esta pessoa possui um tempo de preparação simétrico, conforme mostra a figura 5:

Figura 5: Box plot para o exemplo 06



Fonte: Elaborada pela autora

3. MEDIDAS DE DISPERSÃO

Usualmente resumimos um conjunto de dados com alguma medida de tendência central como a média, a mediana ou a moda. Entretanto, essas medidas não descrevem a flutuação dos valores em torno delas (LOESCH, 2015). Dois conjuntos de valores, embora apresentem a mesma média, por exemplo, podem ter uma variabilidade completamente diferente de seus valores em torno da média. Por isso são usadas medidas de dispersão: elas indicam o grau de variabilidade ou de flutuação dos valores em torno de alguma medida de tendência central considerada.

3.1 AMPLITUDE

A amplitude de um conjunto de dados é uma medida bem simples de ser obtida, trata-se da diferença entre o **Maior** e o **Menor** valor ocorrido entre os dados, conforme mostra a Equação 4. A utilização da amplitude como medida de dispersão é muito limitada, pois, sendo uma medida que depende apenas dos valores externos, é instável, não sendo afetada pela dispersão dos valores internos (MARTINS; DONAIRE, 2012).

Equação 4: Cálculo da Amplitude

$$\boldsymbol{Amplitude = Máximo - Mínimo}$$

Para saber mais

Para ilustrar como a amplitude de um conjunto de dados não considera a forma como os valores se distribuem em torno da média, podemos pensar no seguinte conjunto de dados [1 ; 99 ; 100]. Sua amplitude é de 99, o que "esconde" o fato de haver um elemento muito menor dentre os dados do conjunto.

Exemplo 5:

A amplitude do conjunto das expectativas de vida das onze cidades {70,59,72,71,76, 62,74,68,72,65,78} é calculada da seguinte forma:

Amplitude = 78 – 59 = 19 anos.

3.2 VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

A Variabilidade é inerente aos processos. A variação, dispersão ou ainda flutuação dos dados pode ser medida calculando-se o quão longe os valores se afastam do centro, sendo o centro definido pela média ou mediana. Para avaliar como os dados se distribuem, duas medidas são essenciais: a **Variância** e o **Desvio Padrão**.

Considerando nosso propósito de medir a dispersão dos valores em torno da média, nada mais interessante do que estudarmos o comportamento dos desvios de cada valor em relação à média, isto é, a diferença de cada valor, x_i, com a média, $\bar{x}$: $(x_i - \bar{x})$.

Porém, lembrando as propriedades da média, temos que $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ (MARTINS; DONAIRE, 2012). Logo, estamos diante de um problema: queremos calcular a média dos desvios, porém sua soma é nula. Como resolver esta questão? Uma das soluções apresentadas pelos estatísticos foi o Cálculo da Variância.

Para o cálculo da Variância considera-se o quadrado de cada desvio $(x_i - \bar{x})^2$, evitando assim que a soma dos desvios seja nula. Trata-se da média aritmética dos quadrados dos desvios. Assim, a definição da variância é dada pela Equação 5:

Equação 5: Cálculo da Variância de uma População

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Onde: σ^2 indica variância e lê-se sigma ao quadrado, n o tamanho da população, $\bar{x}$ é a média da população e x_i são os dados observados.

Entretanto, deve-se considerar se temos uma **população** ou uma **amostra**, pois as equações diferem para cada uma. Para o caso do cálculo da variância de valores amostrais é comum usar a Equação 6, comumente chamada de variância não enviesada ou viciada:

Equação 6: Cálculo da Variância de uma Amostra

$$S^2_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Onde, S^2 é a notação de variância amostral, n é o tamanho da amostra, $\bar{x}$ é a média da amostra e x_i são os dados observados.

Observando a Equação para o cálculo da variância, notamos tratar-se de uma soma de quadrados. Por exemplo, se a variável que estamos analisando for mensurada em metros (m), teremos como resultado metro ao quadrado (m^2). Para voltarmos à variável original, necessitamos definir outra medida de dispersão, que é a raiz quadrada da variância - o **Desvio Padrão**. Assim temos:

Desvio padrão populacional:

Equação 7: cálculo do desvio-padrão de uma população

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

E Desvio padrão amostral:

Equação 8: cálculo do desvio-padrão de uma amostra

$$S = \sqrt{S_{n-1}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Um valor baixo de desvio padrão indica que os dados tendem a estar próximos da média. Por outro lado, um desvio padrão alto indica que os dados estão mais espalhados ou dispersos, isto é, mais longe da média.

Para saber mais

Por que existe essa correção no denominador (n-1) nas fórmulas de variância e desvio padrão quando trabalhamos com uma amostra? Os dados em uma amostra tendem a ser mais próximos da média desta amostra do que os dados na população em relação à média populacional. Isso ocorre porque na população há uma maior possibilidade de aparecerem valores extremos, ou seja, a dispersão dos dados em uma amostra é menor que a dispersão dos dados na população. Portanto, para termos um valor adequado de variância e desvio padrão em uma amostra, é preciso realizar este ajuste matemático na fórmula.

Exemplo 5:

Considere o conjunto de dados de expectativa de vida de outras cinco cidades brasileiras:

[70 71 73 74 77]

temos a média $\bar{x} = 73$;

os desvios em relação à média $d_i = (x_i - \bar{x})$: [-3 -2 0 1 4]

A soma dos desvios é sempre zero para qualquer conjunto de dados, portanto quadramos os termos para podermos somar: [9 4 0 1 16]

Ou seja;

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = (70-73)^2 + (71-73)^2 + (73-73)^2$$

$$+ (74-73)^2 + (77-73)^2 =$$

$$= (-3)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (4)^2 = 9 + 4 + 0 + 1 + 16$$

$$= 30$$

e dividindo esta soma por $n-1$ teremos calculado a variância $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

$$\frac{30}{4} = 7{,}5$$

Por fim, calculamos a raiz quadrada da variância amostral resultando no desvio padrão: $S = \sqrt[2]{S^2} = \sqrt[2]{7{,}5} = 2{,}74$

4. FORMATO DA DISTRIBUIÇÃO

O formato procura representar um padrão existente entre os dados do conjunto. O formato da distribuição está relacionado à maneira da frequência ou distribuição de dados ao longo da amplitude e em relação à média. Pode-se classificar a distribuição em **Simétrica**, quando a distribuição ou frequência dos dados, em relação à média, está igualmente distribuída tanto para valores menores como para valores maiores do que média.

Por exemplo, imagine que a média aritmética e a mediana das notas dos alunos do curso de Métodos Quantitativos tenha sido a nota 5. Como você aprendeu anteriormente, sabemos que a mediana é a medida que divide em quantidades de dados iguais um determinado conjunto de dados. Neste exemplo, você poderia afirmar que o número de alunos que estão com uma média menor do que 5 é igual ao número de alunos que estão com a média maior do que 5. Assim, teríamos uma distribuição simétrica das médias dos alunos.

Também se pode classificar a distribuição como **Assimétrica**, que ocorre quando a

distribuição de frequência dos dados, em relação à média, não é uniforme. Em outras palavras, pode haver uma frequência maior de dados menores do que maiores em relação à média, ou vice-versa. Voltando ao exemplo dos alunos do curso de Métodos Quantitativos, a assimetria acontece quando a mediana for diferente da média aritmética. Podemos afirmar que existe uma assimetria à esquerda, ou negativa, quando a média for menor do que a mediana ($\bar{x} < Md$). Isso significa que teria mais alunos com notas acima de 5. Entretanto, caso a assimetria fosse à direita, ou positiva, e mediana seria menor do que a média aritmética ($Md < \bar{x}$), e haveria mais alunos com uma nota menor do que a média 5. A Figura 6 mostra estas classificações.

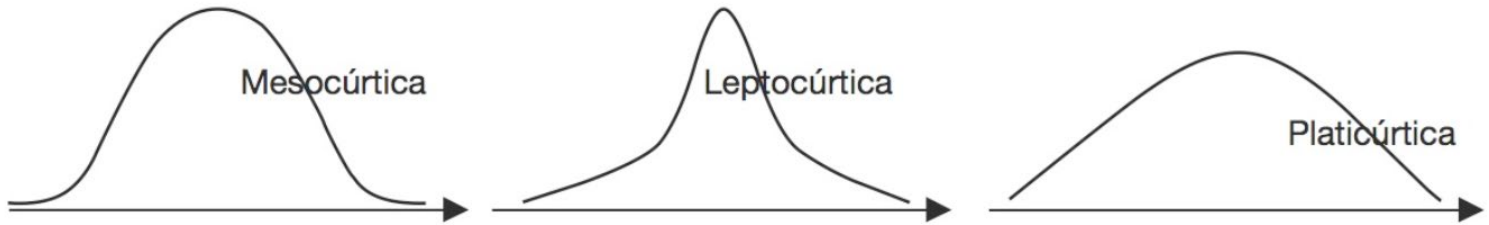
Figura 6: comparação entre três conjuntos de dados em termos de formato

Fonte: elaborada pela autora

Costuma-se dizer que a distribuição **simétrica**, também chamada **Normal ou de Gauss**, assume um formato de sino, nesse caso as caudas à esquerda e à direita possuem o mesmo tamanho.

Há também a medida de **Curtose**, que mede a concentração de valores no centro da distribuição, se a curva é mais achatada ou mais alongada em comparação com a distribuição Normal.

Figura 7: Tipos de curtose



Fonte: Loesch (2015)

Glossário

Curtose: grau de “achatamento” de uma distribuição em relação à curva de distribuição normal ou de Gauss.

Desvio-padrão: raiz quadrada da variância.

Quartil: dividem um conjunto de dados em quatro partes iguais. São casos particulares de Percentis. Sendo o Quartil 1 (Q1 = 25º percentil), a mediana (Q2 = 50º percentil) e o Quartil 3 (Q3 = 75º percentil).

Rol: quando ordenamos de maneira crescente ou decrescente os dados de um conjunto.

Variância: é a medida obtida somando-se todos os quadrados de cada observação do conjunto em relação à sua média aritmética.

Questão para reflexão

Embora um pesquisador possa coletar desde dados de uma amostra ou até de uma população, será que existe alguma restrição na utilização das técnicas de estatística descritiva?

Considerações Finais

- As medidas de tendência central que vimos foram: a moda, a média aritmética, a mediana e quartis;
- As medidas de dispersão que vimos foram: amplitude, variância e desvio padrão;
- As medidas de centralidade podem ‘nos enganar’ se não forem associadas com as medidas de dispersão. Só assim podemos ter um entendimento de como os dados se comportam, ou seja, como se dá a forma de sua distribuição;
- Por fim, pudemos ver como essas medidas se relacionam com o formato da distribuição dos dados pela representação gráfica do diagrama Box-plot.

Referências

LOESCH, Claudio. **Probabilidade e estatística.** Rio de Janeiro: Ltc — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2015.

MARTINS, Gilberto de Andrade; DONAIRE, Denis. **Princípios de estatística.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

WALPOLE, R., MYERS, R. H. **Probabilidade e estatística**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009.

O departamento financeiro, a fim de levantar o consumo de itens de escritório por mês, obteve os seguintes dados { 20, 45, 28, 32, 5, 2, 90 }. Utilize esses dados para as questões 1 a 5

Questão 1

1. A média aritmética é:

a) 90.

b) 28.

c) 30.

d) 31,7.

e) 46.

Questão 2

2. A moda desses dados é:

a) 32.

b) 45.

c) 20.

d) 90.

e) Nenhuma, é uma amostra amodal.

Questão 3

3. A mediana dessa amostra de dados é:

a) 28.

b) 32.

c) 45.

d) 20.

e) 90.

Questão 4

4. O terceiro quartil é representado pelo:

a) Número 32.

b) 6º elemento, que é o número 45.

c) 6º elemento, que é o número 2.

d) Não há 3º quartil.

e) Número 5.

Questão 5

5. Para a construção do box-plot utiliza-se a análise de cinco números, referente a esta amostra, são eles:

a) 2, 5, 28, 45 e 90.

b) 20, 45, 32, 2 e 90.

c) A média, moda, variância, desvio-padrão e amplitude.

d) 31,71, amodal, 887, 29,78 e 88.

e) 2, 90, 222, 7 e 15.

Gabarito

1. Resposta: D.

A soma dos dados é de 222 que, dividida por 7 elementos, resulta em uma média de 31,7.

2. Resposta: E.

Todos os elementos aparecem na mesma frequência.

3. Resposta: A.

Devem-se ordenar os dados em ordem crescente (rol) e como o número de elementos é ímpar a mediana é o elemento na posição que separa a amostra ao meio. Ou seja, o 4º emento correspondendo ao número 28.

4. Resposta: B.

Usando a fórmula K (Q3) = 75*(n + 1)/100, calcula-se que o 6º elemento, em ordem crescente, representa o Q3, neste caso, é o número 45.

5. Resposta: A.

Os cinco números são os valores que correspondem, respectivamente, ao valor mínimo, Q1, mediana, Q3 e valor máximo.

Unidade 3

Probabilidade

Objetivos

1. Apresentar aos alunos os conceitos e teoremas fundamentais de probabilidade e o cálculo de distribuição de probabilidade.

Introdução

O termo probabilidade é usado de modo muito amplo no dia a dia para expressar certo grau de incerteza sobre algum acontecimento. Um torcedor pode apostar no seu time porque sua "probabilidade" de ganhar é boa. O aluno poderá ficar desanimado porque acha que sua "probabilidade" de ir mal na prova é alta.

A ideia de probabilidade desempenha papel importante quando trabalhamos com o conceito de tomada de decisão. Suponhamos que um empresário deseja lançar um novo produto no mercado. Ele precisará de informações acerca da "probabilidade" de sucesso de seu novo produto para direcionar seu investimento.

Sendo assim, conhecer os princípios de probabilidade permite ao aluno a passagem do campo da estatística descritiva para o campo da estatística inferencial. Os conceitos de probabilidade que você verá na primeira parte deste tema serão fundamentais para o estudo da distribuição de probabilidades.

1. CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

De modo simples, como definição, **Probabilidade** é o cálculo feito para estimar a chance ou possibilidade de certo acontecimento ter um resultado esperado, ou seja, acontecer. Para que possamos determinar as probabilidades precisamos estabelecer os conceitos de Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Evento.

1.1 Experimento Aleatório

Quando falamos de tirar uma carta qualquer de um baralho, retirar com ou sem reposição bolas de uma urna ou jogar uma moeda e observar se deu cara ou coroa estamos falando de ocasiões que em estatística chamamos de **Experimentos Aleatórios**. Isso significa que se trata de um experimento que poderá ser repetido sob as mesmas condições várias vezes. Tal experimento apresenta uma gama de resultados, onde embora não seja possível afirmar a priori o resultado antes que o experimento seja realizado, é possível saber todos os possíveis resultados - as possibilidades (MARTINS; DONAIRE, 2012).

1.2 Espaço Amostral

Quando definimos um Experimento Aleatório, o conjunto de todos os possíveis resultados chamamos de **Espaço Amostral** e comumente é representado pela letra grega ômega Ω.

1.3 Evento

Qualquer conjunto de resultados de um experimento chamamos de **Evento**. Portanto, um evento é um subconjunto do Espaço Amostral (Ω). Sendo que ele pode ser: um **Evento Simples** quando é formado por um único elemento, ou um **Evento Composto** quando possuir mais de um elemento. Os eventos costumam ser indicados por letras maiúsculas: A, B, C,...

EXEMPLO 1:

O lançamento de um dado constituiu um experimento aleatório, pois esse experimento poderá ser repetido quantas vezes desejarmos. Antes do lançamento, não podemos dizer qual será o resultado, mas somos capazes de descrever os possíveis resultados: sair o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Estas possibilidades de resultados são o Espaço Amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Considere que se deseja saber a probabilidade de se obter um número par. Então nosso Evento é Composto e representado pelas possibilidades $A = \{2,4,6\}$. Agora se quisermos saber qual a probabilidade de sair apenas no número 3, nosso Evento é Simples e representado pelo conjunto de um único elemento $B = \{3\}$. E as probabilidades dos eventos ocorrerem são descritas, respectivamente, por P(A) e P(B).

Para saber mais

Diante das explicações sobre o conceito de eventos, notamos que Ω (espaço amostral) e Ø (conjunto vazio) também são eventos possíveis, e são chamados respectivamente de **evento certo** e **evento impossível**. Assim, o evento obter um naipe qualquer na retirada de uma carta do baralho é um evento certo, enquanto que obter um sete no lançamento de um dado constitui um evento impossível (MARTINS; DONAIRE, 2012).

2. PROBABILIDADE SIMPLES

Nosso objetivo é calcular a probabilidade de um evento ocorrer. A **Probabilidade Simples** corresponde à ocorrência de um único **Evento** (simples ou composto). Para tanto, iremos admitir que todos os elementos que compõem o espaço amostral têm a mesma chance, ou seja, os resultados são igualmente prováveis. Isto significa que, se n for o número de elementos de Ω então a probabilidade de cada elemento será: $\frac{1}{n}$. Logo, a probabilidade de um evento é dada por:

Equação 7: cálculo de probabilidade simples

$$\begin{matrix}\text{Probabilidade} \\ \text{de ocorrência} \\ \text{do evento } E\end{matrix} = \frac{\text{nº de casos favoráveis ao evento } E}{\text{nº total de resultados possíveis}}$$

Toda probabilidade é calculada entre o intervalo dos números 0 e 1, ou 0 e 100%. Note que, para avaliar a probabilidade de certo evento, você deve "contar" o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis do experimento!

EXEMPLO 2:

No lançamento de um dado não viciado, a probabilidade de se obter o número 3 em um único lançamento pode ser calculada da seguinte forma:

Evento A ={sair o número 3}

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\%$$

Desta forma, o nº de casos favoráveis ao evento A é igual a 1. Pois, ao lançarmos um dado apenas uma vez, existe apenas 1 chance de se obter o número 3 (evento simples). E o nº total de resultados possíveis é igual a 6, pois existe um total de 6 resultados possíveis em um dado.

Se quisermos saber a probabilidade de se obter um número par, em um único lançamento, temos:

Evento B={sair um nº par = 2,4,6}

$$P(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

Ou seja, o nº de casos favoráveis ao evento B é igual a 3. Pois, ao lançarmos um dado apenas uma vez, existem 3 possibilidades de se obter um número par: 2,4 e 6 (evento composto). E o nº total de resultados pos-

síveis é igual a 6, pois existe um total de 6 resultados possíveis em um dado.

Para saber mais

Um exemplo mais realista seria calcular, por exemplo, a probabilidade de uma família usar parte de seu 13º para adquirir uma nova TV de alta definição no Natal.

É sabido por uma pesquisa, realizada em um site de venda de aparelhos de televisão, que no Natal do último ano foram adquiridos 300 televisores de alta definição de imagem e 180 televisores convencionais. Portanto, a probabilidade de uma família adquirir um televisor de alta definição pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{300}{300 + 180} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

Há uma chance de 62,5% de uma família que busca por uma TV comprar um televisor de alta definição segundo os dados históricos.

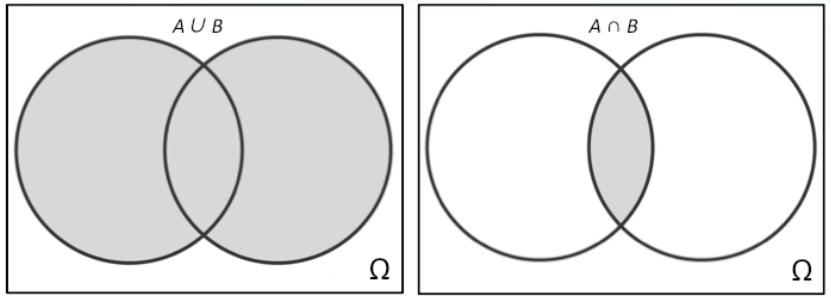
3. PROBABILIDADE COMBINADA

Se por um lado, a probabilidade simples corresponde à ocorrência de um único evento conforme você viu até agora, a **Probabilidade Combinada** corresponde à chance ou probabilidade de ocorrerem dois ou mais eventos.

Antes precisamos observar que, como um evento é um conjunto, podemos realizar com eles operações de união e intersecção de conjuntos. Assim:

- **União ($A \cup B$)** - é o evento que ocorre, caso A ocorra **ou** B ocorra **ou** ambos ocorram.
- **Intersecção ($A \cap B$)** - é o evento que ocorre, caso A **e** B ocorram.

Figura 8: Diagrama de Venn da União e Intersecção entre A e B



Fonte: Elaborada pela autora.

3.1 Regra da Soma das Probabilidades

Se A e B forem dois eventos **mutuamente exclusivos** podemos calcular a chance ou probabilidade de ocorrer ou o evento A ou o evento B aplicando a **Regra da Soma das Probabilidades**, então a probabilidade de A ou B ocorrer é:

Equação 8: cálculo da Regra da Soma das Probabilidades

$$P(A\ ou\ B) = P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Para saber mais

Atenção! Dois eventos A e B são denominados **mutuamente exclusivos**, ou disjuntos, se eles não puderem ocorrer simultaneamente. Isto significa que a intersecção entre os conjuntos A e B é vazia ($A \cap B = \emptyset$), ou seja, a ocorrência de A impede a ocorrência de B e vice-versa. Por exemplo, em um baralho, não se pode pegar uma carta que seja tanto vermelha e de espadas, pois espadas são sempre pretas. Então esse conjunto de possibilidades é vazio, logo sua probabilidade é nula (MARTINS; DONAIRE, 2012).

$P(A \cap B) = 0$ quando $A \cap B = \emptyset$

Calcula-se a probabilidade simples de ocorrência de cada um dos eventos de maneira separada, P(A) e P(B) e, depois se somam essas probabilidades.

EXEMPLO 3:

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos:

A = {sair o número 3}

B = {sair um número par}

Qual a probabilidade do evento A ocorrer? E de B ocorrer? E a probabilidade de sair um número par ou o número 3?

Solução:

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\% \quad e \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Observe que A e B são mutuamente exclusivos: não tem como o número ser 3 e par ao mesmo tempo! Então:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = 0{,}667 = 66{,}67\%$$

Portanto em um lançamento a probabilidade de se obter o número 3 é de 1/3, a probabilidade de se obter um número par é ½ e a probabilidade de se obter o número 3 ou um número par é de 2/3.

3.2 Regra do Produto das Probabilidades

Se A e B forem dois eventos **independentes** podemos calcular a chance ou probabilidade de ocorrerem simultaneamente o evento A e o evento B, aplicando a **Regra do Produto das Probabilidades**, então a probabilidade de A e B ocorrerem é:

Equação 9: cálculo da Regra do Produto das Probabilidades

$$P(A\ e\ B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Para saber mais

Atenção! Dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência, ou não, de um deles não depende ou não está vinculada à ocorrência do outro. Por exemplo, ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, a probabilidade de se obter o resultado coroa na moeda não interfere em obter um número ímpar no dado. É nítido que os eventos são independentes!

Calcula-se a probabilidade simples de ocorrência de cada um dos eventos de maneira separada, P(A) e P(B) e, depois se multiplicam essas probabilidades.

EXEMPLO 4:

Considere o lançamento de dois dados, e os seguintes eventos:

A = {no 1º dado sair o número 3}

B = {no 2º dado sair o número 4}

Qual a probabilidade de no 1º dado sair o número 3 e no 2º dado sair o número 4?

Solução:

$$P(A\ e\ B) = P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}0278 = 2{,}78\%$$

Observe que os eventos A e B são independentes, a ocorrência de um dos eventos não interfere na ocorrência do outro. O fato de ter ou não saído o número 3 no primeiro dado não altera a probabilidade de sair o número 4 no segundo dado.

4. PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é a chance ou a probabilidade de acontecer um evento A, tendo já ocorrido um evento B. Isso significa, o evento B interfere no evento A, ou seja, o espaço amostral ficou reduzido para o evento A uma vez que B já ocorreu. Essa probabilidade possui a seguinte notação P(A | B), lê-se probabilidade de A dado B:

Equação 10: cálculo de Probabilidade Condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$$

Onde:

$P(A \mid B)$ - é a probabilidade de acontecer A tendo ocorrido o evento B;

$P(A \cap B)$ - é a probabilidade de acontecerem os eventos A e B de forma combinada dependente;

$P(B)$ - é a probabilidade de acontecer o evento B.

Observe que se os eventos forem independentes, estamos no caso da Regra do Produto e não no caso de Probabilidade Condicional!

EXEMPLO 5:

No lançamento de um dado não viciado, a probabilidade de se obter o número 4 no segundo lançamento, tendo tirado o número

3 no primeiro lançamento pode ser calcula-

$$P(4\,|3) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\%$$

Onde:

$P(A\,|\,B) = P(4\,|\,3)$ é a probabilidade de acontecer A (probabilidade de se obter o número 4) tendo ocorrido o evento B (número 3 obtido no primeiro lançamento);

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, A = 1 chance em 6 possibilidades (lados do dado) de se obter o número 4, B = 1 chance em 6 possibilidades (lados do dado) de se obter o número 3, resultado igual a $\frac{1}{36}$;

$P(B) = \frac{1}{6}$, B = 1 chance em 6 possibilidades (lados do dado) de se obter o número 3.

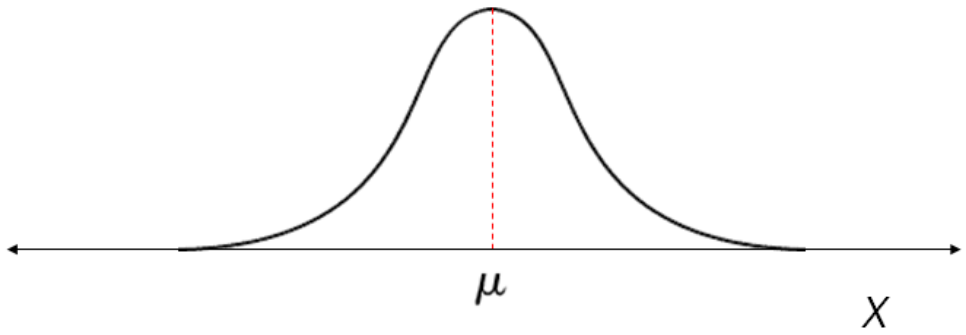
Observe que neste exemplo já sabemos o resultado do primeiro lançamento! Fazendo com que o número de possibilidades (espaço amostral) para o segundo lançamento se reduza.

5. DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADES

Quando não é possível listar individualmente todos os possíveis valores de possibilidades do espaço amostral, estamos trabalhando com o que chamamos de variável aleatória contínua. Associamos a probabilidade a intervalos de valores dessa variável. A forma como se distribuem essas probabilidades, associadas aos valores da variável aleatória, chamamos de distribuição de probabilidades.

A **distribuição normal de probabilidades**, também conhecida como curva de Gauss, é a distribuição mais famosa e utilizada na estatística. A distribuição normal de probabilidades apresenta um gráfico de distribuição de frequências em formato de sino, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9: Exemplo da forma de sino de uma distribuição normal



Fonte: Elaborada pela autora

Para que se caracterize como uma distribuição normal de probabilidades, uma distribuição de frequência deve apresentar as seguintes propriedades:

- Tem que ser simétrica, ou seja, a média aritmética e a mediana devem ser iguais;
- A curva de distribuição de frequência deverá ter a forma de sino, ou seja, simétrica em torno da média;
- A distribuição dos quartis deve ser igual a 1,33 vezes o desvio-padrão;
- Deve possuir uma amplitude infinita cujo f(x) tende a zero para mais ou menos infinito.

Exemplo 6:

No dia a dia muitos eventos apresentam uma distribuição normal de probabilidades. Como exemplo, veja na Tabela 3 a quantidade de refrigerante contida em 10.000 garrafas de 1 litro abastecidas em um dia de produção em uma fábrica de refrigerantes.

Tabela 3: Distribuição da quantidade de abastecimento de refrigerante

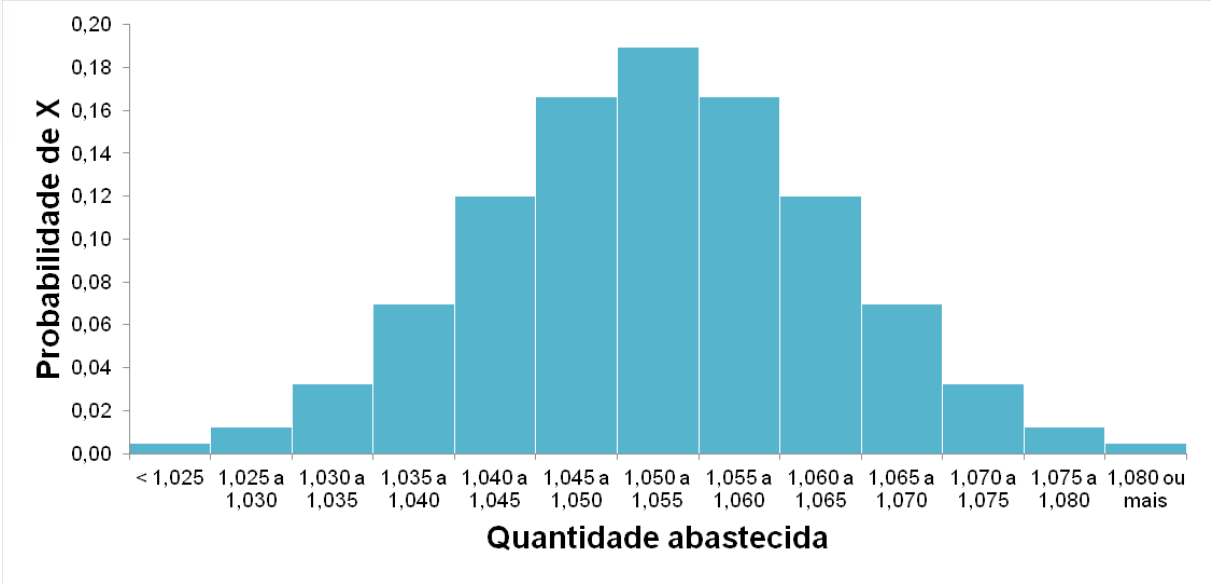
Quantidade abastecida (litros)	Frequência relativa
< 1,025	0,0048
1,025 a 1,030	0,0122
1,030 a 1,035	0,0325
1,035 a 1,040	0,0695
1,040 a 1,045	0,1198
1,045 a 1,050	0,1664
1,050 a 1,055	0,1896
1,055 a 1,060	0,1664
1,060 a 1,065	0,1198

1,065 a 1,070	0,0695
1,070 a 1,075	0,0325
1,075 a 1,080	0,0122
1,080 ou mais	0,0048
Total	**1,0000**

Fonte: Walpole e Myers (2009)

Ao colocar os dados da Tabela 3 em um gráfico de colunas, a distribuição de frequências do abastecimento de refrigerante apresentaria uma curva em forma de sino, conforme mostra a Figura 10. Observe que a distribuição de frequências é simétrica, conforme comentado no Tema 2, pois existe uma quantidade idêntica de probabilidade tanto à esquerda como à direita da categoria com maior probabilidade, que está em 1.050 e 1.055.

Figura 10: Curva de distribuição de frequência do abastecimento de refrigerante



Fonte: Walpole e Myers (2009)

Para se calcular a probabilidade ou chance de um evento que apresenta uma distribuição normal de frequências, você precisará seguir algumas etapas:

1) A primeira etapa é calcular qualquer variável aleatória X para se adequar às tabelas da distribuição normal Z, usando o cálculo da Equação 11.

Equação 11: transformação para distribuição normal

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Onde, X é a variável aleatória, μ é a média aritmética e σ é o desvio-padrão.

2) A segunda etapa é consultar uma tabela de probabilidade, como a Tabela 4 a seguir, procurando o cruzamento do **primeiro dígito após a vírgula** na coluna da esquerda com o **segundo número após a vírgula** na parte superior da tabela.

EXEMPLO 7:

Considere que o tempo para preparo de uma refeição seja, em média, de 15 minutos e que apresente um desvio-padrão de 3 minutos.

Para calcular a chance ou probabilidade de uma refeição demorar 17 minutos para ficar pronta, você precisa usar a Equação 11 da seguinte forma:

$$Z = \frac{17 - 15}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

No nosso exemplo, vamos procurar pelo número 0,6 na coluna da esquerda e pelo número 0,06 na linha superior, como mostra a Tabela 4.

Tabela 4: Probabilidade acumuladas

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133

Fonte: elaborada pela autora

Conforme mostram os destaques na Tabela 4, o cruzamento dos números 0,6 e 0,06 resultam numa probabilidade de 0,2454 de ocorrência. A resposta para o problema é: **há uma chance de 24,54% (0,2454 X 100 = 24,54%) de uma refeição demorar 17 minutos para ser preparada.**

Glossário

Conjuntos mutuamente exclusivos: quando dois eventos não ocorrem simultaneamente.

Curva de Gauss: é o mesmo que curva de distribuição normal, onde a média aritmética e a mediana são iguais e a curva tem forma de sino.

Evento: é o subconjunto de possibilidades do espaço amostral que se tem interesse em medir a probabilidade de ocorrer. Pode ser simples ou composto, possuir apenas um ou mais valores, respectivamente.

Eventos independentes: quando a probabilidade de um evento simultâneo ou sucessivo ocorrer sem interferir na probabilidade do outro.

Probabilidade: chance de um determinado evento acontecer.

Questão para reflexão

Você aprendeu que muitos eventos que ocorrem no nosso cotidiano apresentam uma distribuição de frequência. Eventos simples como o lançamento de um dado ou retirar uma determinada carta do baralho, podem ser estudados com as fórmulas de probabilidade? E eventos contínuos, como o tempo de preparo de uma refeição, podem ser convertidos ao modelo de distribuição normal ou de Gauss?

Considerações Finais

- Ter claro as definições de Espaço Amostral e Evento;
- O cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento pode ser simples, combinada ou dependente de um ou mais eventos;
- É essencial observar qual o tipo de evento (simples, composto, mutuamente exclusivos ou dependentes), antes de calcular a probabilidade;
- Já a probabilidade de um evento contínuo ocorrer é calculada através das aplicações dos passos da curva de distribuição normal ou de Gauss.

Referências

LEVINE, D. M. et al. **Estatística: teoria e aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MARTINS, Gilberto de Andrade; DONAIRE, Denis. **Princípios de estatística**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

STEVENSON, W. J. **Estatística aplicada à administração**. São Paulo: Harbra, 2001.

WALPOLE, R., MYERS, R. H. **Probabilidade e estatística**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009,

Questão 1

1. No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de se obter o número 6 em um único lançamento?

a) 0,0167.

b) 33,3%.

c) 100%.

d) 16,7%.

e) 2,7%.

Questão 2

2. No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de se obter ou 5 ou 6 em um único lançamento?

a) 0,0167.

b) 33,3%.

c) 100%.

d) 16,7%.

e) 2,7%.

Questão 3

3. No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de se obter o número 1 no primeiro lançamento e o número 6 no segundo lançamento?

a) 0,0167.

b) 33,3%.

c) 100%.

d) 16,7%.

e) 2,7%.

Questão 4

4. A nota média dos alunos de Métodos Quantitativos é 8,67 com desvio padrão de 1,13. Qual é a probabilidade de um aluno obter uma média final igual a 9?

a) 11,41%.

b) 24,54%.

c) 16,7%.

d) 33,3%.

e) 100%.

Questão 5

5. A média de altura da população de Tangamandápio é de 1,52m com desvio-padrão de 0,8m. Qual é a probabilidade de, ao acaso, um cidadão ter uma altura de 1,80m?

a) 11,41%.

b) 24,54%.

c) 16,7%.

d) 13,68%.

e) 100%.

Gabarito

1. Resposta: D.

A chance é de 1 em 6, ou seja, basta dividir 1 por 6.

2. Resposta: B.

Temos o Evento Composto A={5,6}. Logo, a probabilidade sendo o nº de casos favoráveis do evento A (no caso 2), sobre o nº total de possibilidades (no caso 6). Temos que a probabilidade de A é: P(A)= 2/6= 33,3%.

3. Resposta: D.

Temos um evento condicional e assim a resolução é:

$$P(6\,|1) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\%$$

4. Resposta: A.

Primeiro transforme os dados para uma distribuição normal através da fórmula: (9 – 8,67) / 1,13 = 0,29. Depois encontre o cruzamento dos números 0,2 com 0,09 na tabela 4.

5. Resposta: D.

Primeiro transforme os dados para uma distribuição normal através da fórmula: (1,80 – 1,52) / 0,8 = 0,35. Depois encontre o cruzamento dos números 0,3 com 0,05 na tabela 4.

Unidade 4

Métodos de estimação

Objetivos

1. O aluno aprenderá a construir e interpretar estimativas de intervalo de confiança e a determinar o tamanho da amostra necessária para desenvolver uma estimativa.

Introdução

O objetivo da Estatística Indutiva (Estatística Inferencial) é obter conclusões sobre aspectos populacionais baseadas em dados obtidos a partir de amostras dessa população. Como visto anteriormente, podemos, por exemplo, usar a média amostral para se estimar a média populacional. De modo geral, os problemas da Estatística Inferencial podem ser separados em dois grupos: a estimação de parâmetros e o teste de hipóteses. Nesta aula concentraremos na primeira parte.

Imagine que você foi contratado em uma grande loja de materiais de construção para controlar, com precisão, o sistema de estoques e de vendas. Uma das maneiras seria analisando cada um dos registros de venda e de movimentação de estoque, mas imagine o tempo necessário para executar esta tarefa! Ou imagine ainda, como com base nos dados de alguns veículos de uma empresa você poderia avaliar o consumo de combustível de toda a frota. Ou ainda, fazendo uma pesquisa com alguns clientes que adquiriram os produtos da sua empresa, qual é o grau de satisfação de todos os clientes da sua empresa. Você poderia fazer uso das técnicas de inferência estatística para, a partir dos dados de uma amostra, tirar conclusões sobre o todo e, assim, num menor tempo, tirar conclusões. Essas respostas são obtidas através da estimação de parâmetros.

1. O que é um Estimador e Estimativa

Conforme você leu na introdução desta aula, diversas situações do cotidiano de alguns profissionais estão associadas ao uso de técnicas de inferência estatística para a determinação de características de uma população, tendo apenas as informações de uma amostra desta população.

Para que a explicação fique mais clara, considere o seguinte exemplo:

Avaliando apenas alguns estudantes de uma universidade, qual seria a proporção, na universidade toda, dos alunos que frequentam o teatro? Suponha que você selecione uma amostra aleatória e um amigo seu, sem saber que já tinha coletado os dados, repita o mesmo procedimento. Você acha que as amostras extraídas por você e pelo seu amigo serão iguais? Provavelmente não. Se realizarmos várias vezes a amostragem na universidade, provavelmente obteremos amostras compostas por alunos diferentes cada vez. Entretanto, apesar de obtermos amostras diferentes, será que as estatísticas a respeito das amostras apresentarão valores próximos ou iguais nas diferentes amostras? A resposta é que estarão bem próximas! Principalmente à medida que temos um número maior de amostras. Precisamos agora apenas saber com qual certeza podemos afirmar que esses valores das amostras são próximos do valor real da população.

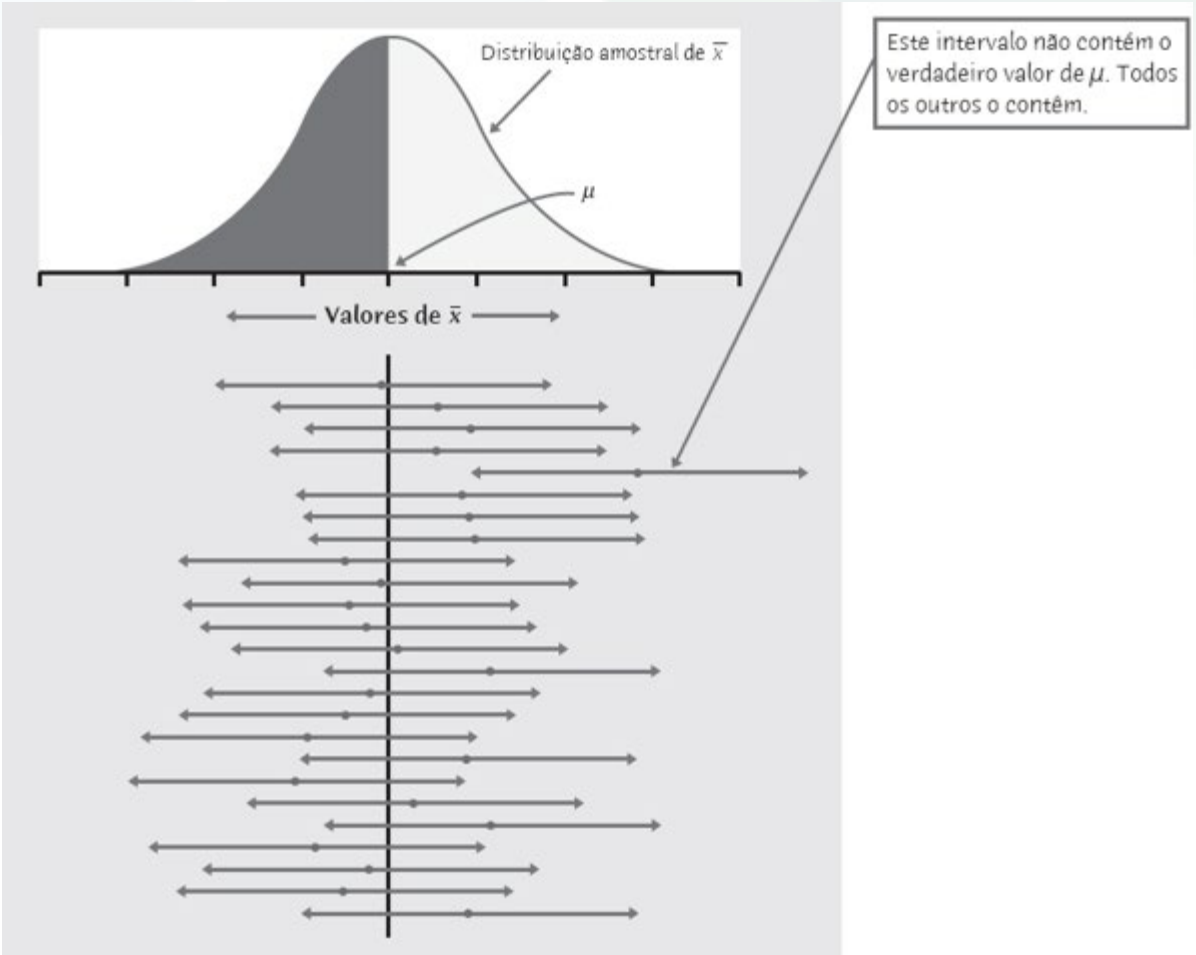
Quando aprendemos sobre estatística descritiva, aprendemos como calcular certas estatísticas (média, variância etc.) referentes a uma única amostra. Agora gostaríamos de expandir esta estatística para toda a população. Isso implica em estimar um parâmetro populacional associado à estatística amostral.

Para saber mais

Lembre que para cada **Parâmetro Populacional** existe uma **Estatística Amostral** correspondente, o qual se espera que aponte como uma boa aproximação do primeiro. Este valor baseado na amostra que associamos à população dá-se o nome de **Estimativa**. **Estimador**, então, é uma função utilizada para estimar um parâmetro da população a partir de estatísticas da amostra. O resultado de um estimador é a estimativa.

Observe a Figura 11, cada uma daquelas barrinhas abaixo do gráfico é como se fosse uma amostra aleatória obtida de uma mesma população e para cada uma delas calculada sua estatística. Como se pode ver, calculando uma mesma estatística (por exemplo, a média) para as diversas amostras, teremos vários valores de estatística amostral para um mesmo parâmetro populacional. Isso significa que temos uma distribuição de valores possíveis, ou seja, o estimador é uma variável aleatória caracterizada por uma distribuição de probabilidade.

Figura 11: Distribuição da média de várias amostras de uma mesma população.



Fonte: Moore, Notz e Fligner (2014).

Resumindo em outras palavras, usando uma notação matemática: seja X uma variável da população que se deseja estudar e θ (lê–se: "teta") a característica de X que se deseja conhecer. O parâmetro populacional θ é desconhecido. Para tanto necessitamos construir um estimador θ (lê–se: "teta chapéu") que, através da amostra, forneça um valor aproximado de θ. Como os valores do estimador (as estimativas) variam de amostra para amostra, isso significa que a inferência baseia-se nos conceitos da distribuição de probabilidade do estimador.

A estimação de parâmetros pode ser feita de duas formas como veremos a seguir:

1.1 ESTIMADOR PONTUAL

Um estimador pontual resulta em um único valor como estimativa do parâmetro populacional. Em aulas anteriores já vimos alguns deles, apenas não os chamávamos de estimador, como a média aritmética ou média amostral ($\bar{x}$) sendo um estimador da média populacional μ (lê-se: 'mi'). A variância amostral (S^2) sendo um estimador da variância populacional σ^2. E o desvio padrão amostral (S), que é a raiz quadrada da variância amostral, sendo um estimador do desvio padrão populacional σ. Assim como mostra a tabela 5:

Tabela 5: Estimadores Pontuais de alguns parâmetros populacionais

Parâmetro da População (θ)	**Estimador ($\hat{\theta}$)**	
Média (μ)	Média amostral ($\bar{x}$)	$\frac{\sum x_i}{n}$
Variância (σ^2)	Variância amostral (S^2)	$\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
Desvio Padrão (σ)	Desvio Padrão amostral (S)	$\sqrt{S^2}$

Fonte: elaborada pela autora

Um estimador que ainda não vimos é o **Estimador Pontual da Proporção Populacional** - $\hat{p}$ (lê-se 'p chapéu'), apresentado na Equação 12:

Equação 12: estimação pontual da proporção populacional

$$\hat{p} = \frac{\text{nº de casos da amostra que possuem a caracteristica desejada}}{\text{tamanho total da amostra}}$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

Onde,

p = seria parâmetro (proporção populacional) que se deseja estimar;

x = número de ocorrências de certa característica numa amostra aleatória de tamanho n;

$\hat{p}$ = seria então a função que estima o parâmetro p, ou seja, o estimador.

Exemplo 1:

Numa pesquisa, foram entrevistados 500 estudantes de uma universidade e, dentre estes estudantes, 100 deles responderam que frequentaram o teatro pelo menos uma vez no último mês. Queremos saber a proporção de alunos que frequentam o teatro. Utilizando a Equação 12:

$$p = \frac{X}{n} = \frac{100}{500} = 0{,}2 = 20\%$$

Você pode concluir que 20% dos alunos entrevistados frequentaram o teatro no último mês, mas ainda, não é confiável extrapolar essa afirmação para toda a população de todos os estudantes daquela universidade. Precisamos ainda nos certificar desse valor, o que veremos mais à frente no tamanho da amostra. Vamos antes dar uma olhada em outro estimador.

1.2 ESTIMADOR INTERVALAR OU INTERVALO DE CONFIANÇA

Uma estimativa pontual raramente se iguala ao valor real de um parâmetro populacional. Então para garantir credibilidade, a esta estimativa pontual podemos definir um intervalo de valores no qual poderemos afirmar com certa confiança que este intervalo contém o valor do parâmetro populacional. A confiança que atribuímos ao intervalo é a probabilidade de que ele irá conter o parâmetro.

Queremos que a estimativa $\hat{\theta}$ seja próxima do parâmetro populacional θ, logo seria sensato esperar que a diferença $(\hat{\theta} - \theta)$ seja pequena na maioria das vezes. Isso significa dizer em outras palavras que se deseja que um valor mais alto para esta diferença torne-se cada vez mais improvável. Assim, queremos construir um intervalo, em torno da estimativa, de modo que seja possível afirmar com certa probabilidade de que o valor do parâmetro populacional esteja contido neste intervalo. Essa é a ideia básica da estimação por intervalo.

Em outras palavras, usando uma notação matemática: para algum valor estimado $\hat{\theta}$ temos um número real $\varepsilon > 0$, que descreve um intervalo $[\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon]$ (também representado por $\hat{\theta} \pm \varepsilon$), no qual, com probabilidade $(1 - \alpha)$, contêm o valor do parâmetro populacional θ, denominado **Intervalo de Confiança**. O valor $\varepsilon > 0$ é chamado de margem de erro ou erro da estimativa e a probabilidade $(1 - \alpha)$ de nível de confiança. Então:

Equação 13: Relação da probabilidade do intervalo de confiança conter o parâmetro populacional com margem de erro ε e nível de confiança $(1 - \alpha)$.

$$P(\hat{\theta} - \varepsilon \leq \theta \leq \hat{\theta} + \varepsilon) = 1 - \alpha$$

Para saber mais

A probabilidade $(1-\alpha)$ que chamamos de Nível de Confiança do intervalo, pode ser apresentada também como γ (lê-se: 'gama'), onde $\gamma = 1 - \alpha$ e α (lê-se: 'alfa') chama Nível de Significância. O nível de confiança mais comum é $\gamma = 95\%$, isso significa que $\alpha = 5\%$, ou seja, 5% de chance do valor estimado estar errado, ou seja, fora do intervalo de confiança. Dessa forma, podemos fazer uma leitura do nível de confiança γ como: resultados corretos em 95% das vezes. E a leitura da equação 13 ficaria algo como: temos 95% de certeza que o intervalo $\hat{\theta} \pm \varepsilon$ contém o valor verdadeiro do parâmetro populacional. Ou, a probabilidade do intervalo $\hat{\hat{\theta}} \pm \varepsilon$ conter o valor verdadeiro do parâmetro populacional é de 95%

Resumindo, um **intervalo de confiança** para um parâmetro tem duas partes:

- Um **intervalo** calculado a partir dos dados da amostra: $estimativa \pm margem\ de\ erro$
- **Um nível de confiança** que dá a probabilidade de que o intervalo contém o verdadeiro valor do parâmetro populacional.

Cada um dos estimadores (Tabela 5) tem um Erro de Estimativa ε determinado a partir de elementos amostrais que podem ser obtidos a partir da Equação 13. Vamos agora então calcular a margem de erro, ε, para a estimativa $\hat{p}$ da proporção populacional em uma amostra com n elementos.

Partimos da equação 13 e obtemos a Equação 14 (caso se interesse, este desenvolvimento pode ser encontrado em LOESCH (2015), Cap.05 - pg.114):

Equação 14: Erro de Estimativa para a proporção populacional

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}$$

Lembra-se do Z? É o cálculo que você aprendeu no Tema 3, para a transformação necessária de uma distribuição qualquer em uma distribuição normal.

Para saber mais

Lembre-se que estamos falando aqui de eventos com distribuição normal! Embora a maioria dos eventos possam ser representados por normal, alguns eventos não podem, como o crescimento de um preço por inflação. Para eventos desse e de outros tipos especiais, no caso da inflação com distribuição exponencial, deve-se realizar outro tipo de operação.

Exemplo 2:

O gerente de operações de uma grande empresa quer estimar a produção de itens que estão apresentando não-conformidades. Os critérios de não-conformidade que ele poderia considerar seriam defeitos no pro-

duto, riscos da carcaça, produtos com peso excessivo etc. Você coleta os dados de uma amostra aleatória (você coleta os itens sem tê-los separado antes por um motivo qualquer). Esta amostra tem tamanho n = 200. Baseando-se nesses 200 itens você organiza uma planilha e verifica que 35 desses itens apresentam algum tipo de não conformidade. Você deseja estimar qual a proporção de peças com não-conformidade em toda a produção. Para analisar os dados, você deseja um intervalo com 95% de confiança.

O primeiro passo é usar a Equação 12 para a estimação pontual:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{35}{200} = 0{,}175$$

Em seguida, você precisará pesquisar na tabela da distribuição padrão normal Z qual é o valor de $Z_{\alpha/2}$ para 95%, que é 1,96. Usando a Equação 14, você calculará o erro estimado:

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}175\,(1-0{,}175)}{200}} = 0{,}05266$$

Teremos então o intervalo de confiança:

$[\boldsymbol{p} - \boldsymbol{\varepsilon}\,;\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\varepsilon}]$ = [0,175 – 0,05266 ; 0,175 + 0,05266]

Você conclui, com 95% de confiança, que a proporção de itens produzidos com alguma não-conformidade naquele dia, em relação a todos os itens produzidos, está entre 0,1223 e 0,2276, o mesmo que afirmar en-

tre: 12,23% e 22,76%. De modo usual dizemos que temos 17,5% de itens não-conformes com um erro aproximado de 5%, isto é, 17,5% ± 5,26%.

2. Tamanho da Amostra

Uma pergunta frequente é: qual deve ser o tamanho mínimo da amostra para que ela seja significativa para minha pesquisa?

Um equívoco comum é pensar sobre o tamanho da amostra apenas como uma parcela da população sem considerar seu tamanho. Para que uma amostra seja representativa de sua população, deve-se estimar o tamanho mínimo n da amostra baseando-se no nível de confiança que se deseja para o intervalo da estimativa.

O **tamanho amostral** mínimo necessário para um determinado nível de erro, é apresentado pela Equação 15:

Equação 15: Amostra mínima para uma proporção populacional

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \hat{p}\,(1-\hat{p})$$

Onde:

n é o tamanho da amostra;

$Z_{\alpha/2}$ é a transformação para a curva normal;

ε é o erro de estimação;

$\hat{p}$ é a estimação pontual.

No entanto, a Equação 15 apresenta uma dificuldade; a estimativa $\hat{p}$ é desconhecida. Afinal ainda estamos calculando o tamanho da amostra que será necessária para se calcular a estimativa. Sendo assim, utilizando o pior cenário, a equação 15 pode ser escrita como a Equação 16, que simplifica o cálculo:

Equação 16: cálculo simplificado de tamanho da amostra

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot 0{,}25$$

Para uma noção rápida do tamanho necessário de uma amostra para um nível de confiança de 95%, por exemplo, (uma consideração muito comum), tem-se $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 ≅ 2, com as devidas aproximações, a Equação 16 pode ser simplificada novamente para :

$$n = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Observe: geralmente, trabalha-se com o nível de confiança de 95% pois desejamos que 90% ≤ γ ≤ 99%. Uma vez que, valores menores que 90% para o nível de confiança possuem pouca "precisão", ou seja, a confiabilidade é muito baixa não sendo interessante. E valores acima de 99%, embora

apresentem um nível de confiança elevado, implicam em intervalos de confiança muito grandes ou tamanho de amostras exagerado, o que pode inviabilizar a pesquisa. Portanto você pode ter percebido que existe um tipo de troca ("trade-off") entre precisão do intervalo, a margem de erro (ε) e a probabilidade do intervalo conter o parâmetro, nível de confiança do intervalo (γ). Sem alterar o tamanho da amostra: quando diminuímos a margem de erro, aumentamos a precisão do intervalo e reduzimos o nível de confiança e quando aumentamos a margem de erro, diminuímos a precisão do intervalo e aumentamos o nível de confiança.

Exemplo 3:

Voltando ao exemplo dos estudantes da universidade que frequentam teatro, qual seria o tamanho da amostra (quantos estudantes você precisaria entrevistar) para que o erro entre a estimativa e o parâmetro não exceda 2% (0,02) com um intervalo de confiança de 95%?

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}175\,(1 - 0{,}175) = 1386\ estudantes$$

usando como base a estimativa que já tínhamos, ou também,

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\varepsilon}\right)^2 \cdot 0{,}25 = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}25 = 2205\ estudantes$$

quando não tivermos uma estimativa prévia, ou ainda,

$$n = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{(0{,}02)^2} = 2500\ estudantes$$

se quisermos um cálculo rápido para ter uma noção do tamanho da amostra necessário.

Glossário

Estatística amostral: característica da amostra que se pode medir tal como média e variância.

Estimativa: resultado de um estimador.

Estimador intervalar ou Intervalo de confiança: um intervalo de valores que contém, com dada probabilidade, o parâmetro populacional.

Estimador pontual: um único valor será a estimativa do parâmetro populacional;

Parâmetro populacional: característica da população sobre a qual será inferido um valor a partir de estimativas da amostra.

Questão para reflexão

Você aprendeu que muitos problemas encontrados nas empresas podem ser resolvidos através do uso da inferência estatística. Esta técnica permite que, a partir dos dados coletados de uma amostra, você possa tirar conclusões sobre toda a população. O exemplo utilizado neste tema foi o controle de produção. Você não precisará medir todos os itens produzidos, mas poderá, a partir da coleta de alguns itens (amostra) fazer conclusões sobre toda a produção. No entanto, o que você precisará saber após coletar uma amostra para ter uma margem de erro mínima?

Considerações Finais

- Estimativa é o valor calculado por um Estimador (que pode ser pontual ou intervalar), sobre alguma estatística da amostra, que tem como objetivo estar o mais próximo possível do valor real de um parâmetro da população.
- Intervalo de confiança traz consigo duas informações: uma estimativa com a margem de erro e o nível de confiança;
- Quando temos um nível de confiança $\gamma = 95\%$ é assumir um nível de significância de $\alpha = 5\%$;
- A partir do erro de estimativa, você poderá calcular qual será o tamanho da amostra necessário para que sua margem de erro seja mínima.

Referências

LOESCH, Claudio. **Probabilidade e estatística**. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2015.

MOORE, David S.; NOTZ, William I.; FLIGNER, Michael A. **A estatística básica e sua prática**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2014.

WALPOLE, R., MYERS, R. H. **Probabilidade e estatística**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009.

Questão 1

1. Qual é a representatividade de embalagens azuis sendo que, de um total de 1000 embalagens produzidas, foram produzidas 472 embalagens azuis?

a) 33,3%.

b) 4,72%.

c) 42,7%.

d) 47,2%.

e) 4,7%.

Questão 2

2. O gerente de produção de uma empresa de cosméticos quer estimar a produção de itens que estão apresentando não-conformidades. Ele coleta uma amostra aleatória de tamanho n = 160. Baseando-se nesses 160 itens ele organiza uma planilha e verifica que 28 desses itens apresentam algum tipo de não conformidade. Para analisar os dados, você deseja um intervalo com 95% de confiança. Qual é a proporção de itens que apresentam alguma não conformidade?

a) 17,5%.

b) 33,3%.

c) 100%.

d) 16,7%.

e) 2,7%.

Questão 3

3. O gerente de produção de uma empresa de cosméticos quer estimar a produção de itens que estão apresentando não-conformidades. Ele coleta uma amostra aleatória de tamanho n = 160. Baseando-se nesses 160 itens ele organiza uma planilha e verifica que 28 desses itens apresentam algum tipo de não conformidade. Para analisar os dados, você deseja um intervalo com 95% de confiança. Qual é o erro estimado para um intervalo de confiança de 95%, sabendo que Z a/2 para 95% é 1,96?

a) 0,01676.

b) 0,05887.

c) 0,58776.

d) 5,8876.

e) 7,6%.

Questão 4

4. O gerente de produção de uma empresa de cosméticos quer estimar a produção de itens que estão apresentando não-conformidades. Ele coleta uma amostra aleatória de tamanho n = 160. Baseando-se nesses 160 itens ele organiza uma planilha e verifica que 28 desses itens apresentam algum tipo de não conformidade. Para analisar os dados, você deseja um intervalo com 95% de confiança. Qual é o intervalo de itens com não-conformidades, sendo que o gerente deseja ter uma confiança de 95%, sabendo que Za/2 para 95% é 1,96?

a) [0,0175 – 0,5887 ; 0,0175 + 0,5887].

b) [0,175 – 0,5887 ; 0,0175 + 0,05887].

c) [0,0175 – 0,05887 ; 0,175 + 0,5887].

d) [0,0175 – 0,5887 ; 0,175 + 0,5887].

e) [0,175 – 0,05887 ; 0,175 + 0,05887].

Questão 5

5. Para planejar um trabalho de melhoria contínua a ser realizado no próximo ano, um analista de produção quer calcular qual deverá ser o total aproximado de itens que ele deverá medir todos os dias para que o erro da sua estimativa seja de apenas 5% (0,05) com um intervalo de confiança de 95% ($z_{\alpha/2} = 1{,}96$).

a) 114.

b) 2454.

c) 385.

d) 1368.

e) 22,1%.

Gabarito

1. Resposta: D.

Use a proporção p ($\hat{p} = \frac{x}{n}$). Apenas dívida 472 (que é a amostra) por 1000 (que é o total de elementos do conjunto) e multiplique por 100 para transformar em porcentagem.

2. Resposta: A.

Use a proporção p ($\hat{p} = \frac{x}{n}$). Apenas divida 28 (que são os itens com não-conformidades) por 160 (que é o total de itens produzidos) e multiplique por 100 para transformar em porcentagem.

3. Resposta: B.

Use equação para o erro de estimativa: $\varepsilon = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}$

4. Resposta: E.

Combine os cálculos da equação $\varepsilon = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$ e o conceito de intervalo $[\hat{p} - \varepsilon\,, \hat{p} + \varepsilon]$

5. Resposta: C.

Utilize a Equação 16 do Tema 4: cálculo simplificado de tamanho da amostra: $n = \left(\frac{1{,}96}{\varepsilon}\right)^2 \cdot 0{,}25$

Unidade 5

Testes de hipóteses, regressão linear e correlação

Objetivos

1. Você aprenderá a utilizar métodos de inferência estatística para determinar se uma afirmativa feita em relação a uma amostra é válida também para a população, com exemplos de aplicações.

Introdução

Como mencionado na aula anterior, sabemos que o objetivo da Estatística Indutiva (Estatística Inferencial) é obter conclusões sobre aspectos populacionais baseadas em dados obtidos a partir de amostras dessa população. Mas, muitas vezes, o objetivo do pesquisador não é a estimação em si, mas sim, fazer afirmações a respeito dos parâmetros. Sabemos que temos dois principais tipos de problemas de inferência: a estimação de parâmetros e o teste de hipóteses. Nesta aula concentraremos na segunda parte.

A lógica do teste de hipótese, assim como os intervalos de confiança, tem como base a ideia do que aconteceria se obtivéssemos várias amostras diversas vezes.

Imagine agora que em uma grande loja de materiais de construção, você foi contratado para ter, com precisão, o sistema de controle de estoques e de vendas. Ao fazer o teste de hipóteses, você precisará determinar se o peso médio de uma amostra de sacos de cimento é condizente com o peso médio esperado de todo o seu estoque.

A seguir, apresentamos sucintamente a lógica do teste de hipótese.

1. FUNDAMENTOS PARA TESTES DE HIPÓTESES

Um teste de hipótese é uma suposição a respeito de um parâmetro populacional. É um teste para aceitar ou rejeitar uma hipótese estatística com base nos dados amos-

trais. Um teste de hipótese começa com um enunciado cuidadoso das afirmativas que queremos comparar.

A afirmativa a ser testada é chamada de **hipótese nula**, representada por $\mathbf{H_0}$. A hipótese nula afirma que o parâmetro populacional assume um determinado valor fixo. O teste é planejado com pretensão de se rejeitar H_0, de forma que se avalia a força das evidências contra a hipótese nula. A outra afirmativa com a qual confrontamos H_0 chamamos de **hipótese alternativa**, e é representada por $\mathbf{H_1}$. A hipótese alternativa pode assumir dois tipos: unilateral se afirma que um parâmetro é 'maior do que' ou 'menor do que' o valor da hipótese nula, ou bilateral se afirma que o parâmetro é diferente do valor de H_0. Ou seja, A hipótese nula expressa uma igualdade, enquanto a hipótese alternativa é dada por uma desigualdade.

Para saber mais

Podemos dizer que a Hipótese Nula é conservadora, do tipo: "o réu é inocente até que se prove o contrário".

Atenção!

As hipóteses devem ser formuladas antes da coleta dos dados. Portanto, os valores especificados nas hipóteses não devem ter nada a ver com valores observados na amostra.

Ao testarmos uma hipótese concluímos a favor, ou contra H_0, esta decisão pode estar correta ou incorreta. Isto é, estamos sujeitos a dois tipos de erros: chamados **Erro Tipo I** e **Erro Tipo II**. Referentes a quando decidi-

mos rejeitar uma hipótese que era verdadeira e ao aceitarmos uma hipótese que é falsa. Os tipos de erros podem ser melhores ilustrados na Tabela 6:

Tabela 6: Tipos de erros

	Situação Real	
Decisão	**H_0 Verdadeira**	**H_0 Falsa**
Rejeitar H_0	Erro Tipo I	OK
Não rejeitar H_0	OK	Erro Tipo II

Fonte: elaborada pela autora

O **Erro Tipo I:** Rejeitar H_0 quando de fato H_0 é verdadeira. A probabilidade de ocorrer esse tipo de erro é chamada de nível de significância α (o mesmo que está atrelado ao nível de confiança do intervalo $\gamma = 1 - \alpha$).

Equação 17: Nível de significância, Probabilidade de ocorrer Erro Tipo I

$$P(Erro\ Tipo\ I) = P(Rejeitar\ H_0 | H_0 \text{é}\ verdadeira) = \alpha$$

O **Erro Tipo II**: Não rejeitamos H_0 quando de fato H_0 é falsa. A probabilidade de ocorrer o erro tipo II é chamado de β (lê-se: beta) e a probabilidade $(1 - \beta)$ é chamada de Poder do Teste, isto é, a probabilidade de acertarmos, quando rejeitamos H_0 sendo H_0 falsa.

Equação 18: Probabilidade de ocorrer Erro Tipo II

$$P(Erro\ Tipo\ II) = P(Não\ Rejeitar\ H_0 | H_0 é\ falsa) = \beta$$

Equação 19: Poder do Teste

$$P(Rejeitar\ H_0 | H_0\ é\ falsa) = 1 - \beta$$

Para saber mais

Dizemos que o Erro Tipo I é mais grave. Seria como ao considerar um julgamento de um réu, sendo: H0: o réu é inocente e H1: o réu é culpado.

- Erro Tipo I: condenar culpado um réu inocente
- Erro Tipo II: considerar inocente um réu culpado.

Os estatísticos não perguntam qual é a probabilidade de estarem certos, mas a probabilidade de estarem errados.

A ideia do estabelecimento de uma hipótese nula que desejamos rejeitar, ou seja, *contra* a qual desejamos encontrar evidências, parece estranha no início. Mas, pense novamente no exemplo do julgamento criminal: o réu é "inocente até que se prove o contrário". Isto é, a hipótese nula é inocente e a acusação deve providenciar provas convincentes contra essa hipótese. É exatamente assim que funcionam os testes estatísticos. Entretanto, em estatística, a evidência é fornecida por dados e usamos a probabilidade para dizer quão forte é esta evidência.

A probabilidade que mede a força da evidência contra a hipótese nula é chamada de **P-valor**.

P-valor é a probabilidade de ocorrer valores da estatística (o valor estimado) mais extremos do que o observado, sob a hipótese de H_0 ser verdadeira. Quanto menor o P-valor, mais forte é a evidência contra H_0 fornecida pelos dados. Pois afirmam que o resultado observado é improvável de ocorrer quando H_0 é verdadeira. Este valor é usualmente exibido em softwares estatísticos, sendo importante entender o que ele significa. Se o P-valor é menor que α, dizemos que os dados apresentam significância estatística. Habitualmente, rejeita-se H_0 se p-valor < α.

Para saber mais

"Significante", em linguagem estatística, não tem o sentido de "importante". Significa simplesmente "improvável de acontecer apenas por acaso". O nível de significância α traduz a palavra "improvável" para um valor exato.

Outra maneira de decidir se H_0 é rejeitada ou não é através da **Região Crítica**, ou **Região de Rejeição**, o valor que delimita a região de rejeição é chamado de valor crítico, representado por k. Para definir a região de rejeição fixe o nível de significância α, ou seja, a probabilidade de cometer o erro de tipo I e considere a distribuição de probabilidade do estimador que se deseja testar.

No teste bilateral para uma média temos:

H_0: $\mu = \mu_0$, a média obtida coincide com a média da população.

H_1: $\mu \neq \mu_0$, a média obtida é diferente da média da população.

Utilizamos a distribuição Z para a estimativa:

Equação 20: distribuição Z normal para uma

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Onde, $\bar{x}$ é a média amostral observada, μ_0 é a média da população, σ é o desvio-padrão e n o tamanho da amostra.

Então, devemos rejeitar H_0 sempre que a média amostral observada se situar além dos pontos críticos. Isto é, temos que o ní-

vel de significância α é a probabilidade de se rejeitar H_0, sendo H_0 verdadeira, ou seja, do valor amostral $\bar{x}$ estar além dos pontos críticos k. Podemos escrever isso matematicamente como:

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0 | H_0\ é\ verdadeira)$$

$$\alpha = P(-k \geq \bar{x} \geq k | \mu = \mu_0)$$

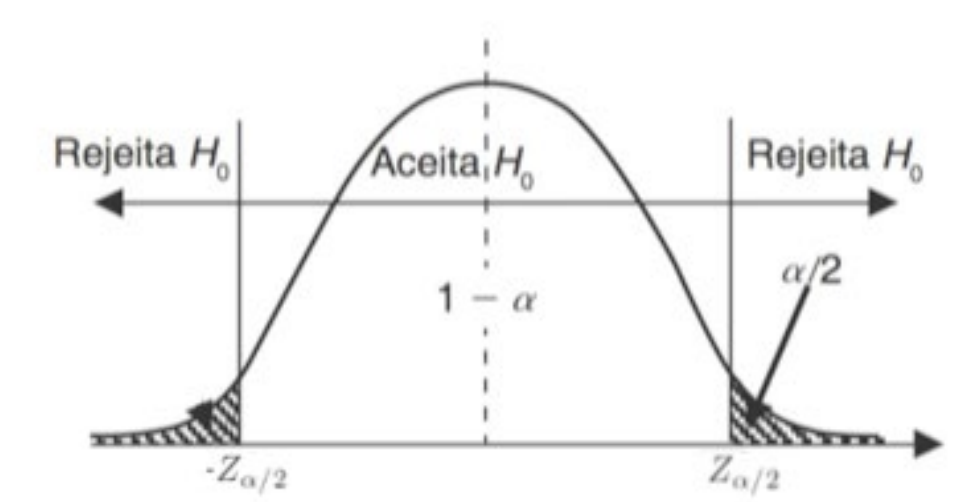
Daqui temos como calcular os pontos críticos:

Equação 21: Pontos críticos para o teste de

$$k = \mu_0 \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Assim obtemos o critério de comparação: se $\bar{x} \leq -k$ ou $\bar{x} \geq k$, rejeita-se H_0. Isto é, se o valor medido estiver além dos valores críticos (Observe: para um nível de confiança de 95% implica em α=5%, ou seja, $Z_{\alpha/2}$ =1,96).

Figura 12: Região Crítica sombreada para rejeitar H_0.



Fonte: adaptada pela autora de LOESCH (2015).

Podemos resumir o procedimento para a realização dos testes nos passos:

- 1. enunciar as hipóteses H_0 e H_1;
- 2. fixar o nível de significância α;
- 3. através da amostra, calcular a estatística que se deseja testar;

- 4. Calcular o p-valor ou determinar a região crítica;
- 5. Conclusão, decidir se rejeita ou não H_0

Para saber mais

Atenção! Em um teste de Hipótese, se a evidência contida na amostra é suficiente para considerar que a hipótese H_0 é falsa, então, a hipótese alternativa H_1 será considerada verdadeira. Neste caso, o resultado do teste será "rejeita-se H_0". Por outro lado, se a evidência da amostra não é suficiente para considerar que H_0 é falsa, o resultado do teste será "não se rejeita H_0". É importante notar que a decisão de "não se rejeitar H_0" não significa concluirmos que H_0 seja verdadeira.

Voltando ao exemplo da loja de materiais de construção, onde se precisa medir o peso médio dos sacos de cimento, deve-se ter como premissa que as embalagens têm o mesmo tamanho e que não apresentam defeitos, ou seja, que as embalagens da amostra são iguais às embalagens da população. Imagine que você deverá testar a hipótese de que o peso médio do saco de cimento é de 10 kg. Ao considerar que o peso médio da amostra é igual ao peso médio da população, você testará o que se chama de **Hipótese Nula**, que é aquela que representa o que se deseja testar, e tem o símbolo de H_0. No exemplo estudado, a hipótese nula é que o estoque de sacos de cimento está em ordem e que suas embalagens estão perfeitas e, logo, o peso médio da amostra de sacos é

semelhante em todo o estoque (população), ou seja:

H_0: μ = 10, onde μ é a média.

Lembrando que você só terá informações de uma amostra (afinal, você não conseguirá pesar todos os sacos de cimento do estoque), você usará dados estatísticos da amostra para realizar inferências.

Para isso, toda vez que você adotar uma hipótese nula, você precisará de uma hipótese alternativa que deve ser verdadeira se a hipótese nula for falsa. A **hipótese alternativa** recebe o símbolo H_1, então temos:

H_1: μ ≠ 10, onde μ é a média.

Para exemplificar, considere que seu estoque (população) seja composto pelos seguintes valores em quilos de cimento nos sacos de média populacional μ = 10:

[5 6,5 7 8 9 10 11 11,5 13 14 15]

Dada uma hipótese H_0 : μ = 10, verdadeira no caso, uma amostra de tamanho 3 pode ser A = {15, 14, 13}, cuja média amostral $\bar{x}$ = 14 difere significativamente de μ. Essa amostra, devido à sua pequena probabilidade de ocorrência (P(A) = 1/165 ≅ 0,006), possivelmente irá conduzir à rejeição da hipótese H_0, e terá ocorrido um erro tipo I. Já a ocorrência de amostras cuja média amostral se situe suficientemente próxima de 10 (a maioria delas) leva à aceitação de H_0 porque não há evidência que conduza à rejeição de H_0. Por outro lado, na mesma população considerada, se a hipótese nula fosse

$H_0 : \mu = 15$ contra $H_1 : \mu < 15$, a amostra A de média amostral 14 levaria à aceitação de H0, quando de fato ela é falsa, sendo verdadeira a hipótese H1. Então terá ocorrido um erro tipo II.

Exemplo 1

Você foi contratado como gerente de uma grande rede de lanchonetes e precisa determinar se o tempo de atendimento dos pedidos mudou de um mês para outro. O tempo médio, no mês anterior, tinha sido de 4,5 minutos.

A hipótese nula é de que o tempo médio de todos os atendimentos (população) não se modificou, ou seja, é igual a 4,5 minutos. Daí a hipótese nula é:

H_0: $\mu = 4{,}5$

A hipótese alternativa equivale ao oposto da hipótese nula. Neste exemplo, a hipótese alternativa é de que o tempo médio mudou, ou seja, é diferente de 4,5 minutos:

H_1: $\mu \neq 4{,}5$

Para resolver seu problema, você coleta o tempo médio de atendimento de 25 pedidos durante uma hora de funcionamento da lanchonete. Nessa coleta, você calcula que o tempo médio foi de 5,1 minutos com desvio-padrão de 1,2 minuto. Conforme você aprendeu no tema 4, você utilizará a transformação para uma distribuição normal, com nível de confiança de 95%.

Para calcular o novo tempo médio de atendimento, e verificar se houve alteração em relação ao mês anterior, você calculará os

pontos da região crítica conforme a Equa-

$$k = \mu_0 \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4{,}5 \pm 1{,}96\,\frac{1{,}2}{\sqrt{25}} = 4{,}5 \pm 0{,}47$$

Então rejeitamos H_0 se $\bar{x} < 4{,}03 \; ou \; \bar{x} > 4{,}97$, como $\bar{x} = 5{,}1$ rejeitamos H_0. Em outras palavras, você verificou que existem evidências de que o tempo médio de atendimento não é mais de 4,5 minutos.

2. REGRESSÃO LINEAR E CORRELAÇÃO

Você aprendeu um método de inferência estatística através do **teste de hipóteses,** no qual por meio da adoção de uma hipótese nula e uma alternativa, pode-se verificar se os dados de uma amostra são equivalentes ao de uma população.

Agora, você aprenderá como fazer **previsões** de uma variável com base nos dados de outras variáveis. Na análise de regressão linear, a variável que desejamos projetar se chama **variável resposta** e as variáveis que serão utilizadas para fazer a previsão são chamadas de **variáveis explicativas.** Muitas vezes, variáveis resposta são chamadas de variáveis dependentes, e variáveis ex-

plicativas são chamadas de variáveis independentes ou variáveis preditoras. A ideia por trás dessa linguagem é que a variável resposta depende da variável explicativa. Entretanto, como "independente" e "dependente" têm outros significados em estatística, preferimos evitar estas palavras. Portanto, uma variável resposta mede um resultado de um estudo, enquanto uma variável explicativa explica ou influencia as mudanças em uma variável resposta.

Resumidamente, a regressão responde à pergunta de como variáveis quantitativas se relacionam, ou seja, qual é a equação de relacionamento entre as variáveis. Ao passo que, a correlação responde à pergunta em que grau as variáveis quantitativas se relacionam.

Para saber mais

O estudo da regressão linear e da correlação surgiu de uma dificuldade que a teoria econômica tinha em quantificar o efeito de variáveis econômicas sobre outras. Por exemplo, o economista busca o estabelecimento de uma função que explique o comportamento das vendas, em unidades de um produto, em função do preço; o administrador precisa de uma função que descreva os custos de um produto, quando as quantidades variam; entre outros. De modo que, com a teoria da regressão linear os economistas, por exemplo, puderam começar a estimar o quanto seriam afetadas as importações caso houvesse um aumento na cotação do dólar em relação à moeda brasileira.

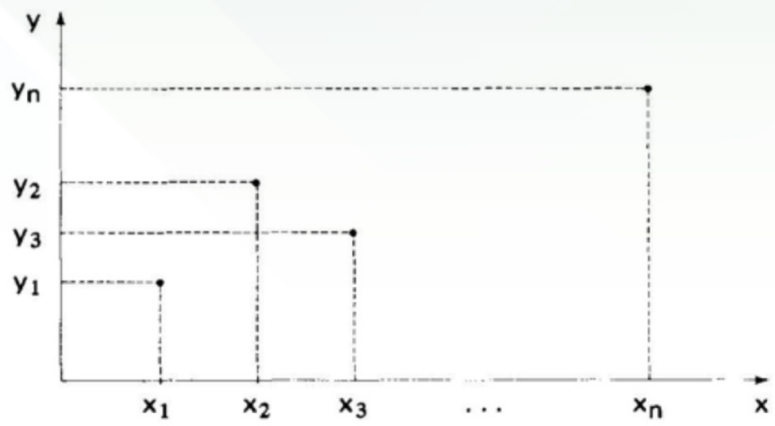
2.1 RETAS DE REGRESSÃO

Esta relação que buscamos entre duas variáveis pode ser descrita por uma **Reta de**

Regressão. Uma reta de regressão resume a relação entre duas variáveis, é uma linha reta que descreve como uma variável resposta *y* muda quando uma variável explicativa *x* muda. Com frequência, a reta de regressão é utilizada para predizer o valor de *y*, dado o valor de *x*.

A maneira mais eficiente de se mostrar a relação entre duas variáveis quantitativas e bastante prática para auxílio da determinação da função entre as variáveis, é por meio de um **diagrama de dispersão**. Um diagrama de dispersão mostra a direção, a forma e a intensidade da relação entre duas variáveis quantitativas. Para desenharmos o diagrama de dispersão devemos coletar uma amostra de valores X e Y: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... , (x_n, y_n), marcando esses pontos num sistema de coordenadas cartesianas. Assim:

Figura 13: Diagrama de Dispersão



Fonte: Martins e Donaire (2012)

No caso do ajustamento de uma linha reta, o diagrama de dispersão apresentará uma "nuvem" de pontos que nos irá sugerir uma relação linear entre X e Y. Dizemos que uma relação linear é forte se os pontos caem próximos a uma reta, e fraca, se eles estão bastante espalhados em torno de uma reta.

É também provável que a nuvem de pontos nos indique outros tipos de funções (exponencial, parábola etc.). Tais ajustamentos fogem aos objetivos desse curso.

Pela análise da "nuvem" de pontos podemos especificar a função que relaciona as variáveis. Como se trata de uma regressão linear, os pontos devem obedecer ao modelo de fórmula conforme a Equação 22:

Equação 22: Equação de regressão linear

$$Y = a + bx$$

Onde;

Y = variável resposta

a = intercepto, ou valor mínimo para y

b = inclinação, ou contribuição marginal para y

x = variável explicativa

De modo que os valores de *a* e *b* da equação descrevam uma reta que passe tão próxima quanto possível dos pontos do diagrama de dispersão. Isto é, queremos minimizar a discrepância total entre os pontos marcados e a reta que iremos determinar. O melhor método para a determinação dos parâmetros *a* e *b* que minimize as discrepâncias é o Método dos Mínimos Quadrados.

Para saber mais

Vamos relembrar alguns conceitos básicos sobre retas: Suponha que y seja uma variável resposta (marcada no eixo vertical) e que x seja uma variável explicativa (marcada no eixo horizontal). Uma reta que relacione y a x tem uma equação da forma: y = a + bx. Nessa equação, b é a inclinação, que é o quanto y muda quando x aumenta de uma unidade. O número a é o **intercepto**, o valor de y quando x = 0.

Exemplo 2:

Um professor de Métodos Quantitativos deseja prever qual será a nota que um aluno irá obter em sua prova tendo como base quantas horas o aluno se dedicou para estudar sua matéria.

Neste exemplo, a variável resposta Y é a nota que o aluno obterá, e a variável explicativa x são as horas de estudo.

Ao colocar os dados no software *Microsoft Excel*, o professor obteve a seguinte equação de regressão linear:

$$Y = 1{,}0 + 3x$$

Com esta equação, o professor conseguiu determinar que:

- Se o aluno não estudar nenhuma hora, ele obterá uma nota igual a 1,0.
- Para cada hora que o aluno estuda, sua nota aumentará em 3 pontos

Não satisfeito, o professor resolveu verificar quais seriam as notas de dois alunos, que estudaram 2 horas e 3 horas, cada um deles.

Usando a equação de regressão linear, ele pôde prever da seguinte forma:

- $Y_1 = 1{,}0 + 3 * 2$ = 7 para o primeiro aluno
- $Y_2 = 1{,}0 + 3 * 3$ = 10 para o primeiro aluno

O professor concluiu que o primeiro aluno, ao estudar 2 horas, terá uma nota estimada de 7, enquanto que o segundo aluno, que estudou 3 horas, provavelmente obterá nota 10.

2.2 Correlação Linear

No tópico anterior aprendemos a determinação de uma função linear que relaciona uma variável resposta com variáveis explicatórias. Aqui, nosso interesse é medir o grau de relação existente entre as variáveis. A **correlação** mede a direção e a intensidade dessas relações. Existem vários coeficientes que medem o grau de correlação, dentre os quais o coeficiente de correlação de Pearson é o mais conhecido.

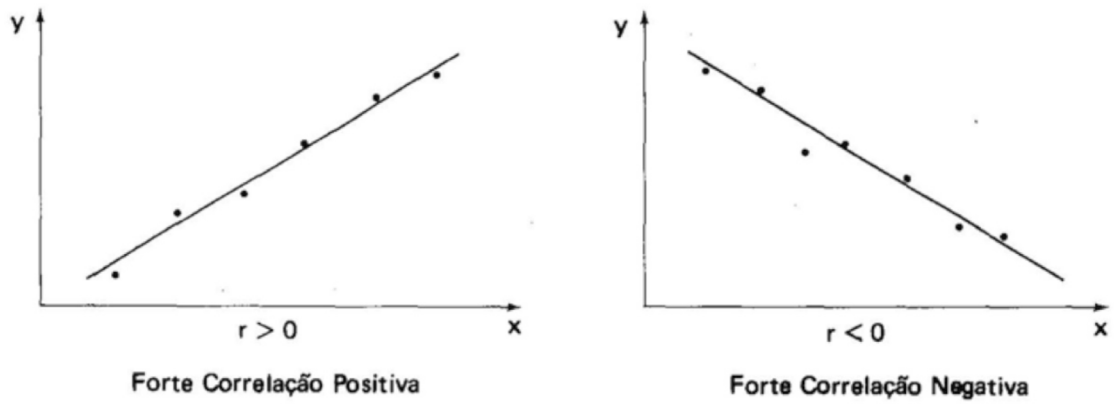
Para avaliar o grau de correlação linear entre duas variáveis, ou seja, o grau de ajustamento dos valores em torno de uma reta, usaremos o coeficiente de correlação de Pearson, que é dado por *r*. Pode-se demonstrar que o valor do coeficiente de correlação *r* sempre deverá estar entre -1 e +1. Valores de *r* próximos de 0 indicam uma relação linear muito fraca. A intensidade da relação linear cresce, à medida que *r* se afasta de 0 em direção a -1 ou a +1.

A fórmula da correlação *r* é um pouco complicada. Na prática, você deve usar um sof-

tware ou uma calculadora que forneça *r*, a partir de valores digitados de duas variáveis *x* e *y*.

Correlação e regressão estão intimamente ligadas. A correlação *r* é a inclinação da reta de regressão de mínimos quadrados quando medimos ambas as variáveis *x* e *y* em unidades padronizadas. A correlação e a regressão devem ser **interpretadas com precaução**. **Represente graficamente os dados** para se certificar de que a relação é aproximadamente linear e para detectar observações atípicas e influentes.

Figura 14: Exemplos de retas de regressão e a correlação



Fonte: Martins e Donaire (2012)

2.3 Cuidados com a correlação e a regressão

Correlação e regressão são ferramentas poderosas para a descrição da relação entre duas variáveis. Ao usar essas ferramentas, você deve estar ciente de suas limitações. Você já sabe que Correlação e Regressão descrevem apenas relações lineares. Você pode fazer os cálculos para qualquer relação entre duas variáveis quantitativas, mas os resultados serão úteis apenas se o diagrama de dispersão mostrar um padrão linear.

Tenha cuidado com variáveis ocultas. A relação entre duas variáveis, muitas vezes, só pode ser entendida se levarmos em conta outras variáveis. Variáveis ocultas podem tornar enganosa uma correlação ou regressão. Uma variável oculta é uma variável que não está entre as variáveis resposta e explicativas de um estudo, mas, ainda assim, tem um efeito importante na relação entre aquelas variáveis.

Quando estudamos a relação entre duas variáveis, frequentemente esperamos que mudanças apresentadas na variável explicativa *causem* mudanças na variável resposta. No entanto, uma associação forte entre duas variáveis não basta para tirarmos conclusões sobre causa e efeito. Tenha cuidado para não concluir que há uma relação de causa e efeito entre duas variáveis apenas porque elas são fortemente associadas. **Correlação alta não implica causação!**

Para saber mais

A correlação requer que ambas as variáveis sejam quantitativas, de modo que os cálculos aritméticos indicados na fórmula de r fazem sentido. Não podemos, por exemplo, calcular a correlação entre os rendimentos de um grupo de pessoas e a cidade na qual elas moram, porque cidade é uma variável categórica.

Glossário

Correlação Linear: mede a direção (- ou +) e intensidade (próximo a 0 ou a 1) da relação entre as variáveis.

Hipótese Estatística: afirmação ou conjectura sobre a natureza de uma população. É geralmente escrita em termos dos parâmetros populacionais.

Reta de Regressão Linear: equação de uma reta que descreve o comportamento de uma variável em função de outra.

Teste de Hipótese: procedimento estatístico baseado na análise de uma amostra para avaliar se os dados podem validar ou não hipóteses a respeito de parâmetros populacionais.

Variável Resposta: é a variável a ser estudada, aquela que é afetada por outras variáveis.

Variável Explicativa: é aquela que afeta uma variável resposta.

Questão para reflexão

Você aprendeu que se baseando em uma amostra, você poderá coletar a média e o desvio-padrão e, a partir de métodos de inferência estatística, poderá fazer comparações e tirar conclusões para a população toda. Além disso, o que você pode determinar através dos métodos estatísticos de correlação?

Considerações Finais

- O Teste de Hipóteses utiliza uma Hipótese Nula e uma Hipótese Alternativa para fazer testes de inferência estatística;
- Você poderá verificar se os dados de uma amostra estão iguais ao de uma população;
- Há como fazer previsões numéricas utilizando o método de Regressão Linear.
- **Variáveis ocultas** podem explicar as relações entre as variáveis resposta e explicativa. A correlação e a regressão podem ser enganosas se você ignorar variáveis ocultas importantes.

Referências

LEVINE, D. M., et al. **Estatística: teoria e aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

LOESCH, Claudio. **Probabilidade e estatística**. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2015.

MOORE, David S.; NOTZ, William I.; FLIGNER, Michael A. **A estatística básica e sua prática**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2014.

MARTINS, Gilberto de Andrade; DONAIRE, Denis. **Princípios de estatística**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

STEVENSON, W. J. **Estatística aplicada à administração**. São Paulo: Harbra, 2001.

WALPOLE, R., MYERS, R. H. **Probabilidade e estatística**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009.

Questão 1

1. Você foi contratado como gerente de uma grande rede de material de construção e precisa determinar se o peso médio dos sacos de cimento continua sendo de 10 quilos. Qual é a Hipótese Nula e a melhor Hipótese Alternativa?

a) H_0: $\mu = 10$ e H_1: $\mu \neq 4{,}5$.

b) H_0: $\mu = 10$ e H_1: $\mu \neq 10$.

c) H_0: $\mu = 4{,}5$ e H_1: $\mu \neq 10$.

d) H_0: $\mu = 4{,}5$ e H_1: $\mu \neq 4{,}5$.

e) As embalagens sofreram diversas alterações.

Questão 2

2. Você foi contratado como gerente de uma grande rede de material de construção e precisa determinar se o peso médio dos sacos de cimento continua sendo de 10 quilos. Ao coletar 30 sacos de cimento, você calcula que o peso médio foi de 11 quilos, com desvio-padrão de 2 quilos. Será que o seu estoque de sacos de cimento está com um peso médio de 10 quilos? Adote um intervalo de confiança de 95%, sabendo que $Z_{\alpha/2}$ para 95% é 1,96.

a) Sim, pois a medição ficou dentro do intervalo de confiança 11 ± 0,71.

b) Sim, pois a medição ficou dentro do intervalo de confiança 2,74 ± 0,71.

c) Não, pois a medição ficou dentro do intervalo de confiança 10 ± 0,71.

d) Não, pois a medição ficou dentro do intervalo de confiança 2,74 ± 0,71.

e) Sim, porque a média da amostra é muito próxima da média da população.

Questão 3

3. Um professor de Estatística deseja prever qual será a nota que um aluno irá obter em sua prova tendo como base quantas horas o aluno se dedicou para estudar sua matéria. Ao colocar os dados no software Microsoft Excel, o professor obteve a seguinte equação de regressão linear: Y= 0,5 + 4x. Se um aluno não estudar, qual será sua nota estimada?

a) 4,5.

b) 5,5.

c) 1,5.

d) 2,0.

e) 0,5.

Questão 4

4. Um professor de Estatística deseja prever qual será a nota que um aluno irá obter em sua prova tendo como base quantas horas o aluno se dedicou para estudar sua matéria. Ao colocar os dados no software Microsoft Excel, o professor obteve a seguinte equação de regressão linear: Y= 0,5 + 2x. Se um aluno estudar 4 horas, qual será sua nota estimada?

a) 0,5.

b) 5,0.

c) 7,5.

d) 8,5.

e) 10.

Questão 5

5. Um professor de Estatística deseja prever qual será a nota que um aluno irá obter em sua prova tendo como base quantas horas o aluno se dedicou para estudar sua matéria. Ao colocar os dados no software Microsoft Excel, o professor obteve a seguinte equação de regressão linear: Y= 0,5 + 2x. Quantas horas um aluno precisará estudar, no mínimo, para tirar nota 10?

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

1. Resposta: B.

A hipótese nula é a média ser igual a 10 quilos, e a alternativa, diferente de 10 quilos.

2. Resposta: C.

$$k = \mu_0 \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$H_0 = \mu_0 = 10$ (considerando a média da população)

$Z_{\alpha/2} = 1{,}96$
$\sigma = 2$

$n = 30$

Logo, temos:

$k = 10 \pm 1{,}96\ (2/\sqrt{30})$

$k = 10 \pm 1{,}96\ (2/\ 5{,}477226)$

$k = 10 \pm 1{,}96\ (0{,}36515)$

$k = 10 \pm 0{,}71$

Assim, intervalo de confiança seria igual a [9,29; 10,71].

Logo, seu estoque estaria com a maioria dos sacos com peso maior que 10 quilos, pois o intervalo [9,29; 10,71] não contém a estimativa da amostra e H0 é rejeitada.

3. Resposta: E.

Colocando o valor 0 em X, na equação Y= 0,5 + 4X, você obterá o valor 0,5.

4. Resposta: D.

Colocando o valor 4 em X, na equação Yi= 0,5 + 2X, você obterá o valor 8,5.

5. Resposta: D.

Colocando o valor 10 em Y, na equação Y= 0,5 + 2X, você obterá o valor 4,75 horas.

Unidade 6

Modelagem matemática para tomada de decisão, conceitos de Programação linear

Objetivos

1. Apresentar aos alunos o conceito de modelagem, por meio dos princípios de programação linear para tomada de decisão em situações de restrições.

Introdução

A tomada de decisão normalmente ocorre ao se identificar um problema específico e é o processo de selecionar uma linha de ação para resolvê-lo. Todo gestor se depara com diversos fatores restritivos, sejam eles relacionados à produção de bens ou à execução de serviços, como: limitações de tempo, matéria-prima, capacidade de investimento e capacidade instalada. Este tema irá apresentar uma metodologia para que gestores possam realizar as suas decisões, sobre o melhor uso desses recursos que são escassos. Para que então, utilizando ferramentas de otimização, estejam aptos a tomar decisões de forma estruturada, identificando as causas raízes dos problemas e atuando de forma sistêmica.

1. Conceitos de programação linear

Sabemos que muitos recursos são limitados, seja na economia, na produção de bens ou na execução de serviços. Mediante este fato, muitos gestores são levados a escolher entre a produção de um determinado item em detrimento de outro, ou na execução de um determinado serviço ao invés de outro.

Como exemplo, imagine que você trabalha em uma fábrica que produz dois tipos de armários de escritório, com as seguintes características:

Tabela 7 – Custos armário

	Preço de venda	**Custo variável**	**Margem de Contribuição Unitária**
Armário com 4 portas	R$ 2.600,00	R$ 2.000,00	R$ 600,00
Armário com 2 portas	R$ 2.400,00	R$ 2.000,00	R$ 400,00

Fonte: Desenvolvida pela autora

Em cada porta dos armários é instalada uma maçaneta, igual para os dois modelos e para todas as portas. O fornecedor de maçanetas acaba de lhe informar que, no próximo mês, ele só conseguirá lhe fornecer 800 maçanetas. Você, como gestor desta empresa, deverá decidir qual o modelo de armário deverá ser produzido para maximizar a margem de lucro de sua empresa.

O mais comum seria fabricar o armário que fornece a maior margem de contribuição em relação à restrição de fornecimento. Desta forma, você poderia fazer a seguinte conta:

4 portas: R$ 600 / 4 maçanetas = R$ 150,00 por maçaneta

2 portas: R$ 400 / 2 maçanetas = R$ 200,00 por maçaneta

A conclusão mais imediata, seria a produção do modelo de **4 portas**, pois ele apresenta uma margem de lucro maior e assim geraria um lucro de:

800 maçanetas / 4 maçanetas por armário = 200 armários x R$ 600 de margem de contribuição = **lucro de R$ 120.000,00.**

Entretanto, será essa a melhor solução? Para problemas com este tipo de tomada de decisão, você poderá usar a técnica de **Programação Linear.** Essa técnica matemática ajuda na determinação do melhor uso dos recursos limitados de uma empresa, desde que eles tenham uma relação linear. Como no exemplo anterior, há uma restrição do fornecimento das maçanetas, mas cada armário apresenta uma relação linear, ou proporcional, com este item.

São aplicações muito comuns desta metodologia:

- Escolher o mix de produtos que irá otimizar o lucro da empresa em relação à capacidade instalada;
- Escolher a melhor rota para minimizar o tempo e o custo de transporte;
- Determinar qual será a melhor carteira de investimentos para otimizar a lucratividade do investimento de acordo com o nível de risco aceitável.

A metodologia ou o modelo de programação linear é composto de alguns quesitos essenciais para que se chegue a uma solução ideal. Tais quesitos incluem: a clareza acerca da decisão que precisará ser tomada; quais são as restrições envolvidas (lembrando que podem ser recursos físicos, como uma matéria-prima, ou recursos de tempo ou de caixa) e, finalmente, qual é a meta ou objetivo que você deseja otimizar ou minimizar.

Para compreender a decisão a ser tomada, faça perguntas como: quanto desejo produzir, qual a melhor rota, seria melhor alocar os recursos financeiros no produto A ou B? Indo além nas questões de restrição, lembre-se que de elas podem estar associadas a fatores limitantes de fornecimento de matéria-prima, horas perdidas com trânsito parado e até mesmo à limitação de caixa, ou de recursos financeiros, que sua empresa possui.

Para saber mais

Para entendermos como abordar um problema vamos definir alguns conceitos:

Modelo: é uma representação simplificada do comportamento real de um sistema através de expressões matemáticas.

- **Variáveis de Decisão**: são variáveis utilizadas no modelo que podem ser controladas pelo gestor. A solução do problema é encontrada testando-se diversos valores para estas variáveis.
- **Parâmetros**: são variáveis utilizadas no modelo que não podem ser controladas pelo gestor. São admitidos valores fixos aos parâmetros para se encontrar solução ao problema.
- **Função-objetivo**: é uma função matemática que representa o principal objetivo do gestor. Pode ser de dois tipos: minimização ou maximização.
- **Restrições**: são regras que determinam as limitações dos recursos ou atividades associados ao modelo.
- **Algoritmo**: é uma sequência de instruções que para uma determinada entrada gera um determinado resultado.
- **Otimização**: é a ação de maximizar ou minimizar uma função-objetivo sujeita a restrições obtendo uma solução ótima.

2. Modelagem matemática

Para a tomada de decisão, você pode organizar as informações provenientes de seu problema, da seguinte forma:

Para a **decisão**, as variáveis deverão ser representadas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A **Função Objetivo** que irá representar o objetivo a ser alcançado, é representada por:

MÁX (ou MÍN) = $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Onde, MÁX = Maximizar (Lucros, capacidade de produção etc.); e MÍN = Minimizar (Custos, tempo etc.).

As **Restrições** são representadas por 3 formas possíveis:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq$ limite

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ limite

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq$ limite

No exemplo do gestor da fábrica de armários, a função objetivo genérica seria:

MÁX = $mc_1 * x_1 + mc_2 * x_2$

onde:

MÁX = Maximizar a margem de contribuição;

mc_i = margem de contribuição de cada item;

x_i = quantidade a ser produzida de cada item.

Para saber mais

- A função objetivo específica do exemplo seria:
- MÁX = 600 x1 + 400 x2

As restrições poderiam ser representadas de forma genérica pela inequação:

$a_{1*} x_1 + a_{2*} x_2 \leq$ Restrição

onde:

a_i = é a quantidade consumida de maçanetas em cada tipo de armário;

"Restrição" = é a quantidade limite de maçanetas que podem ser fornecidas.

Para saber mais

A função de restrição do nosso exemplo seria:

$4x_1 + 2x_2 \leq 800$

onde:

x_1 e x_2 = são uma quantidade ideal de armários que multiplicados pela quantidade de maçanetas necessárias para cada tipo de armário (4 e 2), resultem em uma quantidade total de maçanetas que seja menor ou igual à capacidade de fornecimento de 800 maçanetas.

Para chegar à solução ótima deste problema, existem as seguintes possibilidades de solução:

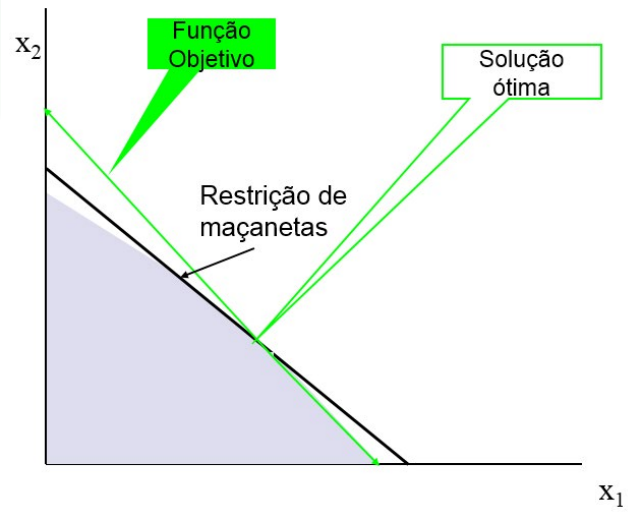
Solução Gráfica

Solução Matricial

Solução Computacional

A **Solução Gráfica** permite encontrar o ponto ótimo através do encontro das retas geradas tanto pela função objetivo, como pela equação de restrição. Veja na Figura 15 como ficaria a solução gráfica para o caso da fábrica de armários:

Figura 15: solução gráfica para o exemplo do problema dos armários



Fonte: elaborada pela autora

Resumo das Etapas da Solução Gráfica:

1. Plote a linha de contorno de cada restrição do modelo;

2. Identifique a região viável (conjunto de pontos do gráfico que satisfaz, simultaneamente, todas as restrições).

3. Encontre a solução ótima por um dos métodos a seguir:

- a) Plote uma ou mais curvas de nível da função objetivo e determine a direção na qual alterações paralelas desta curva produzem melhores resultados da função objetivo.
- b) Identifique as coordenadas de todos os pontos extremos da região viável e calcule os valores da função objetivo associados a cada ponto. Se a região viável é limitada, o ponto com melhor valor da função objetivo será a solução ótima.

Exemplo 1

Uma pequena empresa produtora de café possui apenas dois produtos, café grãos tipo A e café grãos tipo B. E gostaria de saber onde direcionar seus investimentos, ou seja, decidir qual dos dois produtos deve ter sua produção aumentada. A empresa sabe que o café tipo A retorna metade do lucro que o café tipo B. Além disso como a empresa é pequena, a produção por mês não passa de 4 unidades, sendo que no máximo duas unidades do café tipo A e três unidades do café tipo B podem ser produzidas.

Função-objetivo:

MAX = $x_1+2\ x_2$ (café tipo A retorna metade do lucro que o café tipo B)

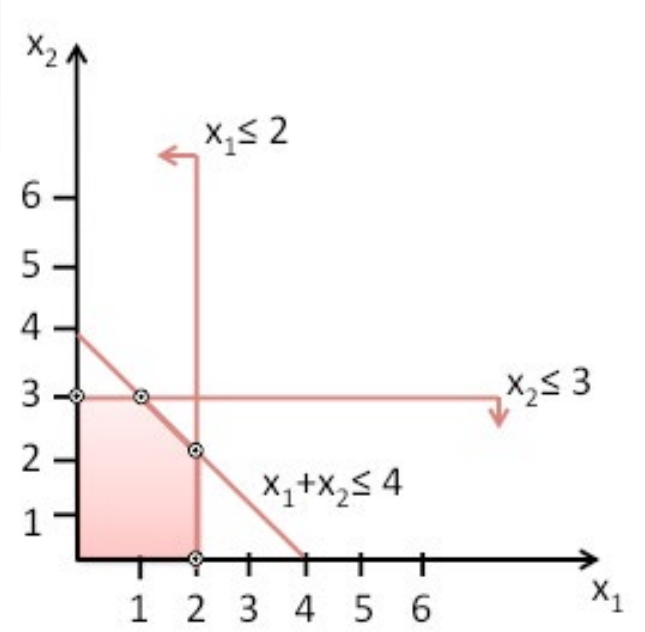
Restrições:

$x_1+x_2 \leq 4$ (produção por mês não passa de 4 unidades)

$x_1 \leq 2$ (são produzidos no máximo 2 cafés tipo A)

$x_2 \leq 3$ (são produzidos no máximo 3 cafés tipo B)

Figura 16 - Região factível:



Fonte: elaborada pela autora

Temos então esta área sombreada que é a região onde está nossa solução. Temos 4 vértices nesta região na qual devemos calcular seu valor na função-objetivo para obter a solução ótima. Temos então:

(0,3) = 0 + 2*3 = 6

(1,3) = 1+ 2*3 = 7

(2,2) = 2 + 2*2 = 6

(2,0) = 2 + 2*0 = 2

Portanto a solução ótima que maximiza a função-objetivo é o vértice (1,3), isso significa que a empresa deve produzir 1 café tipo A e 3 cafés tipo B para obter o melhor lucro dado seu investimento.

A Solução Matricial seria a resolução do determinante da matriz construída com os parâmetros, tanto da função objetivo como da função de restrição.

No próximo Tema, você aprenderá o método de Solução Computacional, utilizando a função Solver do software Microsoft Excel.

Glossário

Função de Restrição: equação ou inequação que representa a limitação de um determinado recurso.

Função Objetivo: feita para maximizar ou minimizar uma variável desejada.

Programação linear: técnica de modelagem matemática para determinação do melhor uso de recursos limitados.

Região Factível: área delimitada pelas retas descritas pelas restrições na qual se encontra a solução do problema.

Questão para reflexão

Você aprendeu que existem decisões de negócios que podem estar sujeitas a diversos tipos de restrição, como a capacidade de fornecimento de um determinado tipo de matéria-prima, da quantidade de recursos que podem ser alocados para um investimento, ou até mesmo o tempo de transporte de uma carga até a entrega final ao cliente. Existem outros campos onde você possa aplicar as restrições vistas nesta aula?

Considerações Finais

- A otimização de funções matemáticas pode ser resolvida por técnicas de programação linear para a tomada de decisão;
- Para poder serem utilizadas, as variáveis devem apresentar uma relação linear, ou proporcional, entre si;
- A metodologia utilizada inclui a construção de uma função objetivo e de pelo menos uma função de restrição.
- Resolver um problema de otimização consiste em determinar os valores ótimos destas variáveis que minimizam ou maximizam uma função objetivo.

Referências

WALPOLE, R., MYERS, R. H. Probabilidade e estatística. 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009.

Considere o seguinte problema para as questões de 1 a 5. Uma empresa que produz 2 tipos de ração: versão normal (Tipo 1) e versão light (Tipo 2). Três matérias-primas são utilizadas para manufaturar essas rações de acordo com as instruções da tabela abaixo:

Matéria-prima	**Tipo 1 (normal)**	**Tipo 2 (light)**	**Quantidade disponível (ton.)**
Milho	2	1	1500
Proteína	1	1	1200
Lipídios	1	0	500
Lucro líquido	R$ 15,00	R$10,00	

As colunas Tipo 1 e Tipo 2 são as quantidades requeridas para a fabricação das rações, ou seja, indicam as toneladas de matéria-prima que são necessárias para produzir uma tonelada da respectiva ração. Nós queremos saber quanto produzir das rações de tal maneira a maximizar o lucro líquido e respeitar as restrições de disponibilidade das matérias-primas.

Questão 1

1. Suas variáveis de decisão seriam:

a) a, b e c representando respectivamente as quantidades de milho, proteína e lipídios utilizados na receita da produção da ração.

b) t_1, t_2 e t_3 representando respectivamente as toneladas de milho, proteína e lipídios a serem utilizados no total.

c) x_1 e x_2 representando respectivamente a quantidade em toneladas de ração tipo 1 e ração tipo 2 a serem produzidas.

d) L_1 e L_2 representando respectivamente o lucro associado a cada tipo de ração.

e) l_1, l_2 e l_3 representando respectivamente o lucro associado a cada tipo de matéria-prima.

Questão 2

2. É uma restrição a ser considerada:

a) A disponibilidade de milho.

b) A quantidade produzida de ração tipo 2.

c) O lucro associado à ração tipo 1.

d) A quantidade produzida de ração tipo 1.

e) A soma em toneladas total de ração produzida.

Questão 3

3. A função-objetivo para este problema pode ser escrita da seguinte forma:

a) Mín = $15\,x_1 + 10\,x_2$.

b) Máx = $1500(x_1+x_2)+1200(x_1+x_2)+500(x_1+x_2)$.

c) Mín = $x_1 + x_2$.

d) Máx = $x_1 + x_2$.

e) Máx = $15x_1 + 10x_2$.

Questão 4

4. A solução ótima obtida significa:

a) A quantidade a ser usada de cada matéria-prima para produzir cada tipo de ração.

b) A quantidade total em toneladas de cada matéria-prima que será usada para produzir as rações.

c) A quantidade em toneladas de cada tipo de ração a ser produzida de forma a obter o melhor lucro possível obedecendo às limitações do problema.

d) O lucro que cada tipo de ração irá gerar para a empresa caso seja produzida.

e) A quantidade em tonelada de cada matéria prima para maximizar a produção.

Questão 5

5. No método de Solução Gráfica de problemas de Programação Linear, considerando nosso exemplo, a solução, ou ponto ótimo, é:

a) O vértice onde se cruzam a função das restrições e a função objetivo apresenta o maior valor.

b) O vértice onde se cruzam a função objetivo e o eixo x.

c) O vértice onde se cruzam a função objetivo e o eixo y.

d) O vértice onde se cruzam a função de restrição e o eixo x.

e) O vértice onde se cruzam a função de restrição e o eixo y.

1. Resposta: C.

Sabendo que variáveis de decisão são variáveis utilizadas no modelo que podem ser controladas pelo gestor e, considerando o problema, as variáveis de decisão são x1 e x2 representando em toneladas a quantidade de ração de cada tipo a ser produzira de modo a maximizar o lucro.

2. Resposta: A.

Assim como para o milho, deverá existir uma função de restrição associada a cada uma das matérias-primas. Que podem ser escritas da seguinte forma de acordo com a receita exibida na tabela:

$2x_1+x_2 \leq 1500$ (restrição de disponibilidade de milho)

$x_1+x_2 \leq 1200$ (restrição de disponibilidade de proteína)

$x_1 \leq 500$ (restrição de disponibilidade de lipídios)

3. Resposta: E.

A função-objetivo descreve aquilo que buscamos maximizar ou minimizar. Neste caso queremos maximizar o lucro, logo a função-objetivo é descrita pela soma do lucro gerado pela produção da ração tipo 1 mais o lucro gerado pela produção da ração tipo 2, ou seja, máx = $15x_1+10x_2$.

4. Resposta: C.

Como nosso objetivo é maximizar o lucro e nossas variáveis de decisão são a quantidade de ração de cada tipo a ser produzida. Então, nossa solução ótima significa: A quantidade em toneladas de cada tipo de ração a ser produzida de forma a obter o melhor lucro possível obedecendo às limitações do problema.

5. Resposta: A.

É um ponto no gráfico onde a função-objetivo apresenta o maior valor dentre os pontos onde as restrições se cruzam.

Unidade 7

Aplicação do solver do Excel para otimizar modelos de programação linear

Objetivos

1. Você irá aprender a resolver os problemas vistos em Programação Linear, com uma função objetivo e uma ou mais funções restritivas, através do método computacional. Para isso utilizaremos uma ferramenta do software Microsoft Excel que se chama Solver.

Introdução

Muitas vezes, durante a gestão de uma empresa, você precisará tomar decisões de maximização ou redução de variáveis e terá, como contrapartida, restrições de recursos. O método de Programação Linear, por meio da modelagem, lhe permite identificar e transformar esses problemas em funções matemáticas. A ferramenta Solver auxilia na resolução desses sistemas de equações através do método computacional.

1. TUTORIAL DE ATIVAÇÃO DO SOLVER

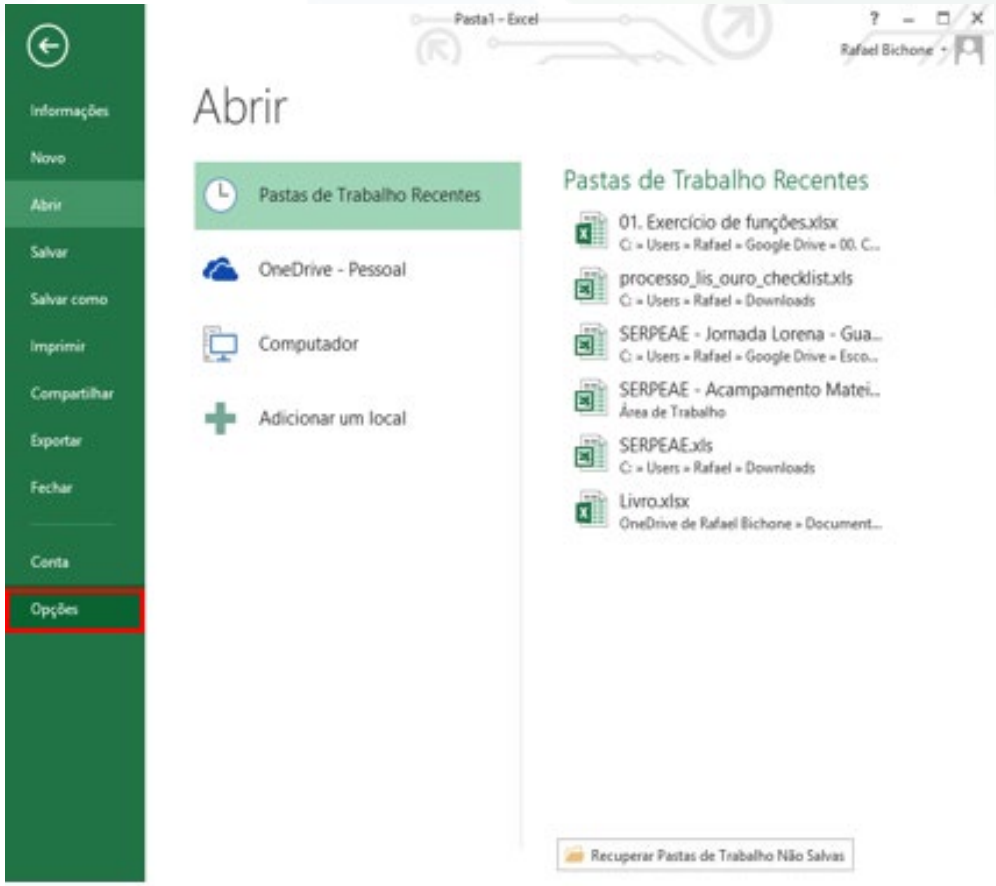
Você aprendeu na aula de Programação Linear que alguns problemas operacionais apresentam restrições de recursos ao serem analisados. Exemplos desses problemas são a otimização de rotas, redução de custos, entre outros. As restrições podem ser tanto de recursos físicos, como restrições de fornecimento de matérias-primas, quantidade de recursos que podem ser aplicados em um processo, como restrições diversas, como o tempo máximo que um cliente aceita para receber determinado produto.

Esses problemas podem ser resolvidos com a utilização das técnicas de Programação Linear, pelo processo de modelagem da função-objetivo e das restrições. A solução desse sistema de equações pode ser obtida através de alguns métodos e diferentes softwares. O uso de ferramentas computacionais permite uma maior agilidade na solução dessas equações. Nesta aula apresentaremos como utilizar a ferramenta Solver presente no software Microsoft Excel, utilizando como exemplo a versão (2007-2010).

Para operar o módulo de resolução de problemas de Programação Linear Solver, você precisará seguir os seguintes passos para ativá-lo:

- Clique no menu **Arquivo** e depois em **Opções**, conforme Figura 17:

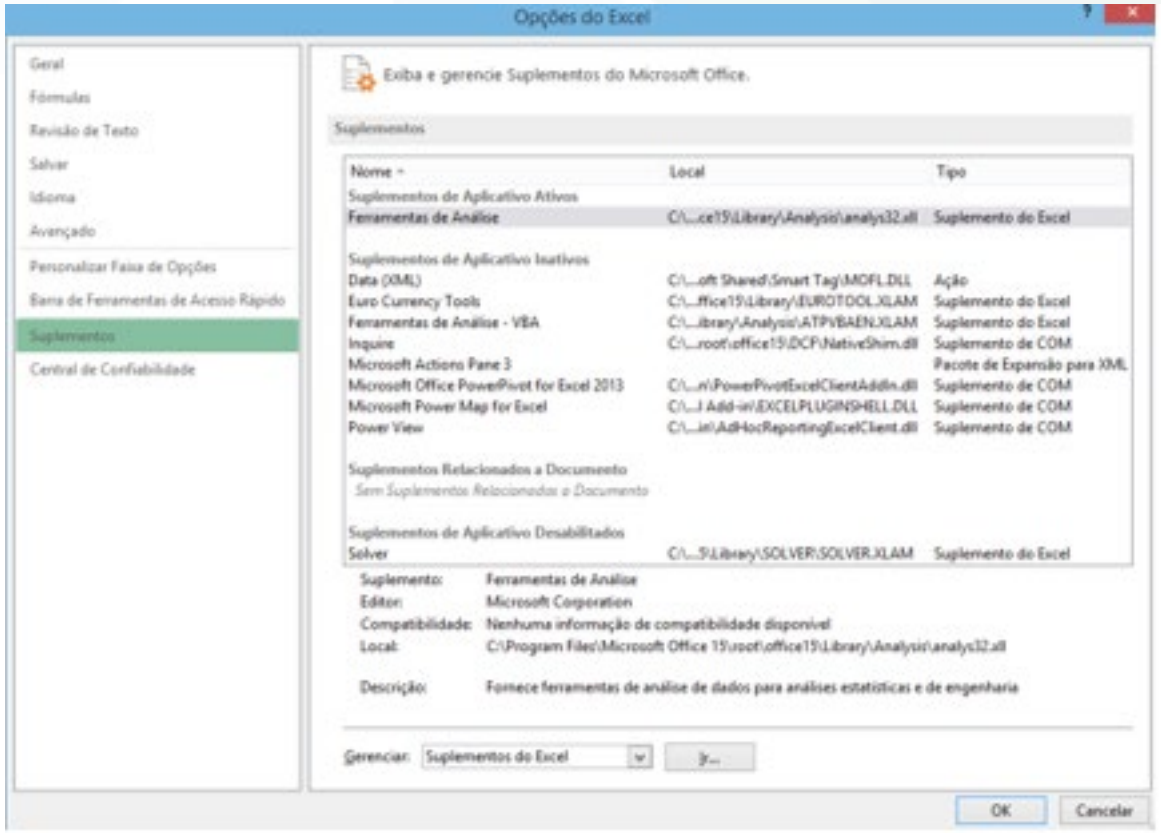
Figura 17: Menu Arquivo -> Opções



Fonte: elaborada pela autora

- Na tela de **Opções** do Excel, clique em **Suplementos**, conforme Figura 18:

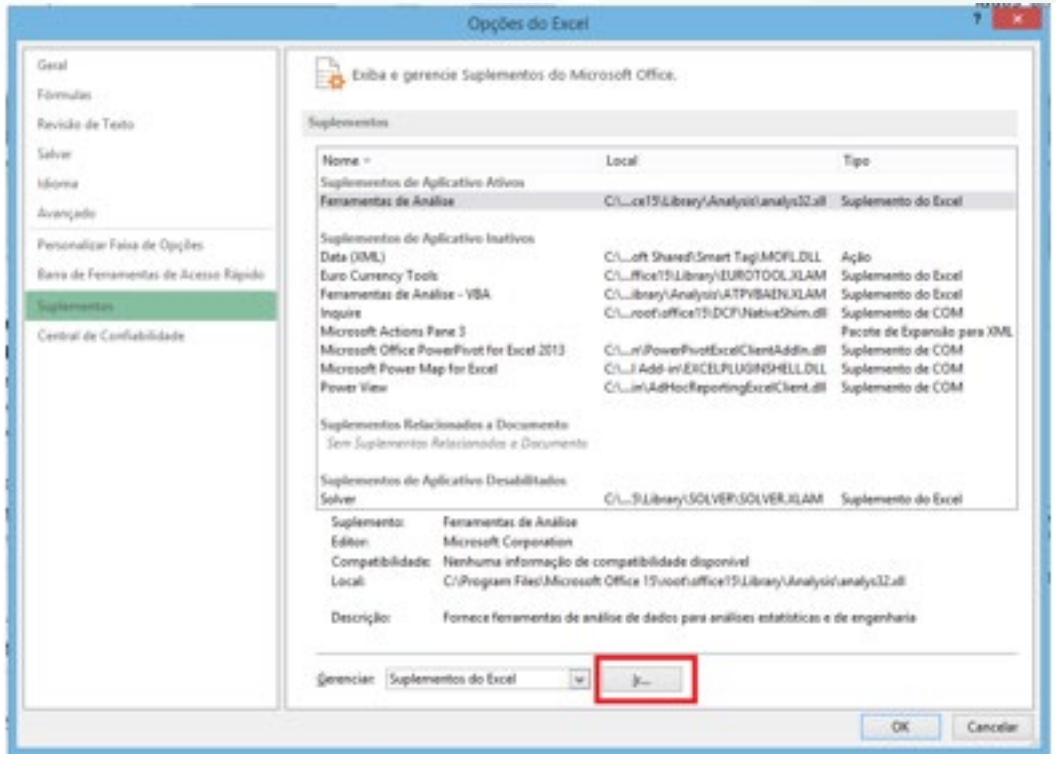
Figura 18: Tela de Opções do Excel -> Suplementos



Fonte: elaborada pela autora

- Na tela de **Suplementos**, clique no botão **Ir**, destacado na Figura 19:

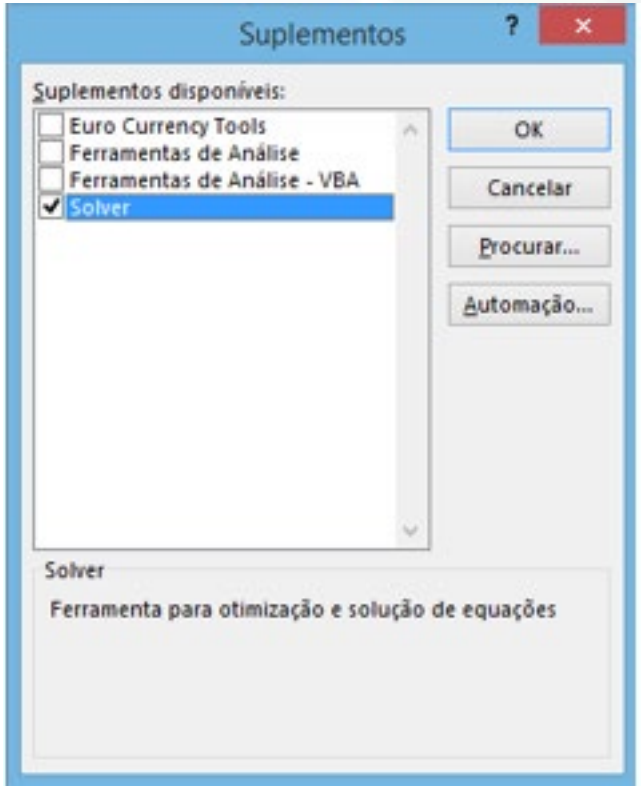
Figura 19: Botão Ir... na tela de Suplementos



Fonte: elaborada pela autora

- **Selecione** a caixa de opção ao lado de **Solver** e clique em **Ok**, conforme Figura 20:

Figura 20: Seleção do suplemento Solver



Fonte: elaborada pela autora

- A ferramenta Solver, deverá aparecer no menu **Dados -> Solver**, conforme Figura 21:

Figura 21: Ferramenta Solver no Microsoft Excel

Fonte: elaborada pela autora

2. Aplicação do solver para resolver problemas de programação linear

Agora que seu Excel está pronto para executar o Solver, como exemplo de uso vamos voltar ao problema do Tema 6, lembra?

Relembrando o enunciado do problema:

Imagine que você trabalha em uma fábrica que produz dois tipos de armários de escritório, com as seguintes características:

	Preço de venda	**Custo variável**	**Margem de Contribuição Unitária**
Armário com 4 portas	R$ 2.600,00	R$ 2.000,00	R$ 600,00
Armário com 2 portas	R$ 2.400,00	R$ 2.000,00	R$ 400,00

Em cada porta dos armários é instalada uma maçaneta, igual para os dois modelos e para todas as portas. O fornecedor de maçanetas acaba de lhe informar que, no próximo mês, ele só conseguirá fornecer 800 maçanetas. Você, como gestor desta empresa, deverá decidir qual modelo deverá ser produzido para maximizar a margem de lucro de sua empresa.

A modelagem elaborada para este problema foi a seguinte:

A função-objetivo:

Equação 23: função-objetivo problema dos armários.

$$MÁX = 600 * x_1 + 400 * x_2$$

E a função de restrição:

Equação 24: função de restrição problema dos armários.

$$4x_1 + 2x_2 \leq 800$$

Para resolver este exemplo no Excel, precisamos passar esta modelagem que desenvolvemos para o problema em um formato que o Excel entenda. Devemos então configurar a planilha como mostra a Figura 22:

Figura 22: Planilha de configuração do Solver

	A	B	C	D	E	F
1		X1	X2	Total	Sinal	Limite
2	Restrição 1	4	2	0	<=	800
3	Lucro	600	400	0		
4	Solução	0	0			
5						

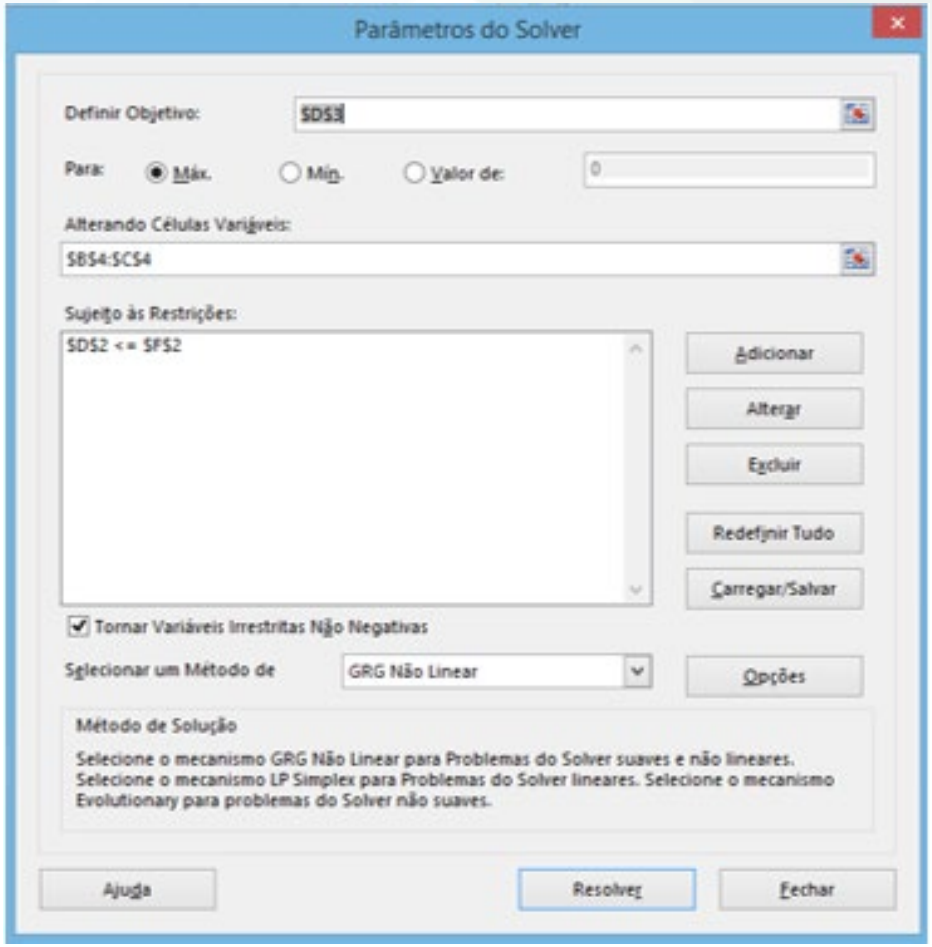
Fonte: elaborada pela autora

- As células B2 e C2 são referentes à condição de restrição, os valores inseridos são os coeficientes da equação de restrição (Eq.24).
- O valor da célula D2 está associado à restrição. Corresponde ao total que será obtido a partir da solução calculada no solver, em função de x_1 e x_2 e tem digitada a seguinte equação =B2*B4+C2*C4. Que corresponde à equação de restrição: $4x_1 + 2x_2$ (Eq.24).

- O valor da célula F2 equivale à limitação total da restrição, neste caso, o total de maçanetas que podem ser fornecidas: 800.
- Os valores das células B3 e C3 são referentes à função-objetivo, os valores inseridos são os coeficientes da equação da função-objetivo (Eq.23).
- A célula D3 está associada à função-objetivo. Corresponde ao total que será obtido a partir da solução calculada no solver, em função de x_1 e x_2 e tem digitada a seguinte equação =B3*B4+C3*C4. Que corresponde à equação da função-objetivo: $600 * x_1 + 400 * x_2$ (Eq.23).
- Os valores das células B4 e C4 correspondem à solução a ser obtida para as variáveis de decisão x_1 e x_2.

Agora que já elaboramos o problema no formato das células do Excel. Clicamos no botão Solver. Ao acionar o Solver, surge a tela de parâmetros do Solver, mostrada da Figura 23, cuja configuração é explicada a seguir:

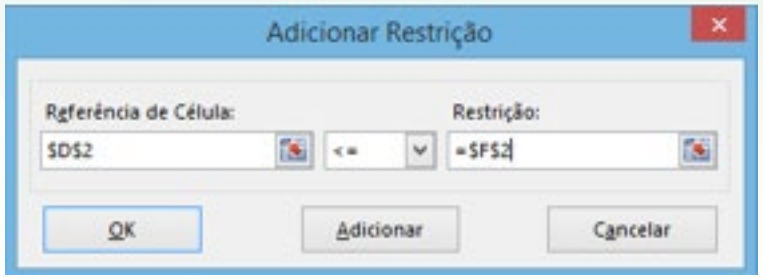
Figura 23: Configuração dos Parâmetros do Solver



Fonte: elaborada pela autora

- A primeira caixa de seleção é referente à função-objetivo. Logo, a célula D3 deve ser adicionada ao campo “Definir Objetivo”.
- Como neste nosso exemplo trata-se de uma otimização para maximizar o lucro, então a opção “Máx.” deve estar selecionada.
- O próximo campo corresponde às variáveis de decisão x_1 e x_2 que queremos encontrar a solução. Logo, as células B4 e C4 devem ser adicionadas ao campo “Alterando Células Variáveis”.
- O último campo diz respeito às condições de restrição do problema. Ao clicar no botão ‘Adicionar’ surgirá uma janela conforme mostra a Figura 24:

Figura 24: Configuração da Restrição



Fonte: elaborada pela autora

- Adicione a célula referente à equação de restrição. Logo, a célula D2 deve ser adicionada ao campo “Referência de Célula”. Confirme no sinal da equação que foi modelada com o campo na janela. E, então, selecione a célula correspondente ao valo do limite da restrição, isto é no nosso caso, a célula F2. Clique em Ok para finalizar a elaboração da restrição e fechar esta janela.

- Clique em Resolver. Sua planilha deverá gerar a seguinte resolução, mostrada na Figura 25.

Figura 25: resolução do exemplo de Programação Linear

	A	B	C	D	E	F
1		X1	X2	Total	Sinal	Limite
2	Restrição 1	4	2	800	<=	800
3	Lucro	600	400	160.000		
4	Solução	0	400			

Fonte: elaborada pela autora

A solução apresentada pelo Solver significa então que a melhor solução seria a fabricação de 400 armários de 2 portas, e o valor máximo de lucro será de R$ 160.000,00. Essa solução é contra a solução intuitiva de se produzir mais daquele produto que possui a maior margem de contribuição, que daria um lucro (visto no tema anterior) de R$ 120.000,00. Não utilizar a programação linear nesse caso custaria à empresa não receber um fluxo de R$ 40.000,00.

Demos aqui um exemplo que talvez até mesmo com poucos cálculos você descobrisse que o melhor era investir na quantidade ao invés da margem de lucro, mas e se as variáveis começam a aumentar e complicar? Será que seria tão fácil chegar a uma minimização ou maximização? Vamos ver outro exemplo.

Exemplo 1

Suponha agora que você trabalhe em uma empresa de mineração. No momento estão sendo exploradas duas jazidas com minérios: Tipo A e Tipo B. A concentração de compostos por tonelada de cada tipo de minério é mostrada na tabela a seguir:

Composição	Minério Tipo A	Minério Tipo B
Cobre	20%	30%
Zinco	20%	25%
Ferro	15%	10%
Custo de extração por tonelada	$90	$120

Seu objetivo é extrair minério suficiente para obter pelo menos 8 ton. de Cobre, 6 ton. de Zinco e 5 ton. de Ferro com o menor custo possível.

Nosso problema então pode ser modelado da seguinte forma:

Seja x_1 = minério Tipo A e x_2 = minério Tipo B;

A função-objetivo é dada por:

$$\text{Mín} = 90 * x_1 + 120 * x_2$$

As restrições são três, cada uma referente a um composto, que desejamos obter, presente nos minérios:

$0{,}2 * x_1 + 0{,}3 * x_2 \geq 8$ (para o cobre)

$0{,}2 * x_1 + 0{,}25 * x_2 \geq 6$ (para o zinco)

$0{,}15 * x_1 + 0{,}1 * x_2 \geq 5$ (para o ferro)

Agora devemos transcrever essa modelagem para as células do Excel:

No primeiro momento, sabemos as informações apresentadas na Tabela 1 podemos construir a Tabela 2:

Tabela 1: Dados extraídos do problema

composto	Minério A	Minério B
cobre	0,2	0,3
zinco	0,2	0,25
ferro	0,15	0,1
custo $/ton	90	120

Tabela 2: Tabela de resolução no Excel, antes do cálculo com o Solver

	Qtdade	Minério A	Minério B	Total	Sinal	Limite
	cobre	0,0	0,0	0	>=	8
restrições	zinco	0,0	0,0	0	>=	6
	ferro	0,0	0,0	0	>=	5
	custo	0,0	0,0	**0**		
	solução					
		x1	x2			

Além de já conhecer a função-objetivo, que é: **Mín = 90 * x1 + 120 * x2**

Pois bem, frente as informações que tenho, preciso construir as fórmulas no Excel, permitindo que o Solver traga a resolução adequada para o meu problema.

Começamos com a configuração da coluna “Total”, imputando a seguinte fórmula para as respectivas linhas: percentual do minério tipo A x quantidade necessária (e é exatamente essa quantidade que busco solucionar) + percentual do minério tipo A x quantidade necessária (idem), ou seja, na primeira linha 0,2*x1+0,3*x2, na segunda linha 0,2*x1+0,25*x2 e assim por diante.

Após configurar essa coluna, preciso criar uma nova linha que permite indicar as quantidades x1 e x2 em células da planilha, ficando assim:

Tabela 1: Dados extraídos do problema

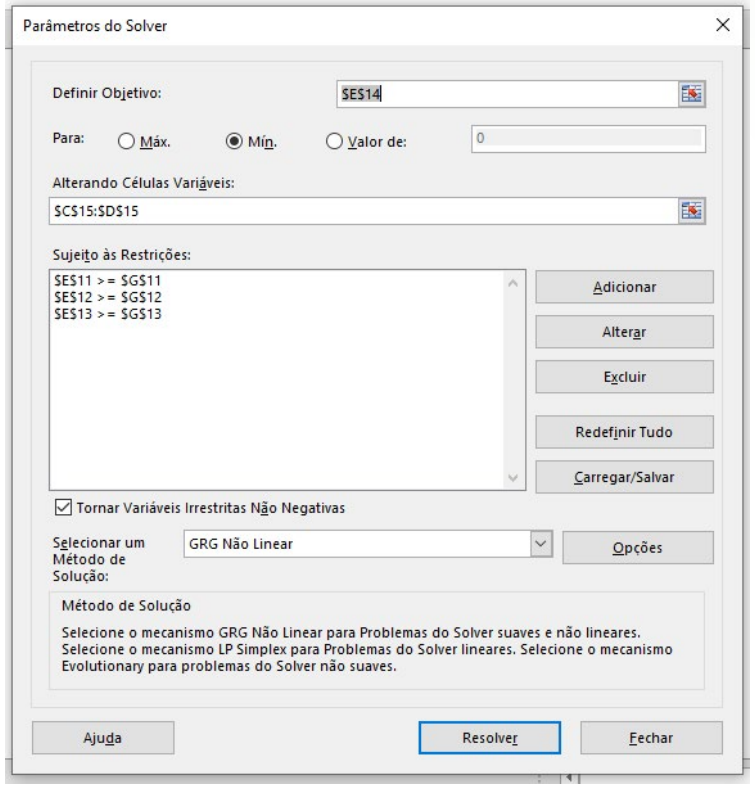
composto	Minério A	Minério B
cobre	0,2	0,3
zinco	0,2	0,25
ferro	0,15	0,1
custo $/ton	90	120

Tabela 3: Planilha do Excel, com as fórmulas embutidas nas células

	Qtdade	Minério A	Minério B	Total	Sinal	Limite
	cobre	=C4*C15	=D4*D15	=0,2*C15+0,3*D15	>=	8
restrições	zinco	=C5*C15	=D5*D15	=0,2*C15+0,25*D15	>=	6
	ferro	=C6*C15	=D6*D15	=0,15*C15+0,1*D15	>=	5
	custo	=C7*C15	=D7*D15	**=90*C15+120*D15**		
	solução					
		x1	x2			

*Obs.: não esqueça de imputar o sinal de igual (=) antes de inserir a fórmula e clicar nas respectivas células. Lembre-se que x1 e x2 são, respectivamente, a linha “solução” e suas duas respectivas colunas (minério tipo A e minério tipo B).

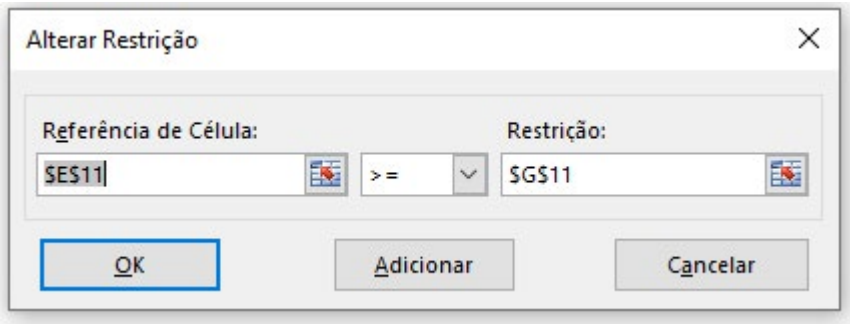
Feito tudo isso, é hora de aplicar o método Solver, clicando na aba “Dados”, em seguida “Solver”, conforme explicado na vídeo-aula 2 deste conteúdo (imagem abaixo).



Em “definir objetivo”, selecione a célula interseccional entre solução e total, cuja fórmula deve constar a função objetivo: = 90 * x1 + 120 * x2 (neste exemplo corresponde a célula E14). Para tanto, sempre selecione as respectivas células ao invés de digitar os valores. Esse input de informações é fundamental para que o Solver entenda aonde você quer chegar.

Retomando, logo abaixo da definição de objetivo, selecione “Mín.”, pois o que buscamos é reduzir ao máximo o custo da extração de minério, respeitando a composição de cobre, zinco e ferro da qual preciso.

Logo abaixo, em “alterando células variáveis”, selecione as duas células à frente da linha “solução” (neste exemplo são as células C15 e D15), clicando no botão no canto direito da tela. Por fim, ajuste as restrições, incluindo três linhas que se referem a coluna total *versus* limite.



Após incluir as 3 restrições, clique em OK e depois em “Resolver”.

Assim, a resolução é a que segue:

Tabela 1: Dados extraídos do problema

composto	Minério A	Minério B
cobre	0,2	0,3
zinco	0,2	0,25
ferro	0,15	0,1
custo $/ton	90	120

Tabela 4: Resultado obtido com o Solver

	Qtdade	Minério A	Minério B	Total	Sinal	Limite
	cobre	5,6	2,4	8	>=	8
restrições	zinco	5,6	2,0	7,6	>=	6
	ferro	4,2	0,8	5	>=	5
	custo	2520,0	960,0	3480		
	solução	28	8			
		x1	x2			

Portanto nossa solução diz que deveremos extrair 28 toneladas do minério Tipo A e 8 toneladas do minério Tipo B, obtendo 8 ton. de Cobre, 7,6 ton. de zinco e 5 ton. de ferro, obedecendo as restrições com um custo mínimo de $ 3.480.

Para saber mais

Fique sempre atento ao objetivo do problema, se queremos Maximizar ou Minimizar a função-objetivo. E não se esqueça de ajustar o Solver, principalmente confirmando o sinal das restrições!

Glossário

Função de Restrição: equação ou inequação que representa a limitação de um determinado recurso.

Função Objetivo: feita para maximizar ou minimizar uma variável desejada.

Programação linear: técnica de modelagem matemática para obter uma solução ótima, um recurso para determinação do melhor uso em problemas de recursos limitados.

Variável de Decisão: a variável que alternando seus valores fornecerá o melhor valor para a função-objetivo, sendo a resposta para o problema.

Questão para reflexão

Você aprendeu a resolver questões de Programação Linear através do Método Computacional com a utilização da ferramenta Solver do software Microsoft Excel. Em quais situações você poderia aplicar esta ferramenta hoje, no seu ambiente de trabalho?

Considerações Finais

- Você precisa compreender qual é sua função objetivo e suas restrições;
- Escreva as equações no Excel conforme o exemplo desta aula;
- Verifique se a solução apresentada condiz com o esperado.

Referências

MEDEIROS, V. Z. et al. **Métodos Quantitativos com Excel**. São Paulo: Cenange Learning, 2008.

Questão 1

1. Um gerente de uma empresa de logística tem que otimizar o uso de duas rotas de entregas, devendo diminuir o tempo de entrega das mercadorias. Ele sabe que na rota X1 ele tem um lucro de R$ 300,00 e na rota X2 seu lucro é de R$ 400,00. Entretanto, a entrega pela rota X1 demora 1 hora e pela rota X2, 1,5 horas. A restrição é que ele só possui 50 caminhões para realizar essas rotas. Qual seria a configuração da planilha para resolver este problema?

a)

	X1	X2	Total	Sinal	Limite
Restrição 1	300	400	0	<=	50
Lucro	300	400	0		
Solução	0	0			

b)

	X1	X2	Total	Sinal	Limite
Restrição 1	300	400	0	<=	50
Lucro	1	1,5	0		
Solução	0	0			

Questão 1

c)

	X1	X2	Total	Sinal	Limite
Restrição 1	1	1,5	0	<=	50
Lucro	300	400,0	0		
Solução	0	0			

d)

	X1	X2	Total	Sinal	Limite
Restrição 1	300	400	0	<=	700
Lucro	1	1,5	0		
Solução	0	0			

e)

	X1	X2	Total	Sinal	Limite
Restrição 1	1	1,5	0	<=	700
Lucro	1	1,5	0		
Solução	0	0			

Questão 2

2. Para o problema exposto na questão 01. Utilizando o Solver, o melhor lucro seria obtido com:

a) A utilização de 50 rotas X1.

b) A utilização de 50 rotas X2.

c) A utilização de 30 rotas X1 e 20 rotas X2.

d) A utilização de 20 rotas X1 e 30 rotas X2.

e) Não há como otimizar as rotas.

Questão 3

3. Para um tratamento está sendo elaborada uma dieta, você tem a disposição seis diferentes opções de nutrientes como base, entretanto existem restrições acerca da ingestão mínima de vitamina A e vitamina C para o bom funcionamento do organismo. Considerando a concentração dessas vitaminas, expostas na tabela a seguir, seu objetivo é fazer uma dieta com um custo mínimo, de tal maneira que contenha pelo menos 9 unidades de vitamina A e 19 unidades de vitamina C. Qual seria a função-objetivo da para resolver este problema?

	Número de unidades de nutriente por Kg					
Nutriente	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Vitamina A	1	0	2	2	1	2
Vitamina C	0	1	3	1	3	2
Custo/ Kg	35	30	60	50	27	22

a) $1*x_1 + 0*x_2 + 2*x_3 + 2*x_4 + 1*x_5 + 2*x_6$.

b) $35*x_1 + 30*x_2 + 60*x_3 + 50*x_4 + 27*x_5 + 22*x_6$.

c) $0*x_1 + 1*x_2 + 3*x_3 + 1*x_4 + 3*x_5 + 2*x_6$.

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 9$.

e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 19$.

Questão 4

4. Para o problema exposto na questão 03. Qual seria a configuração da planilha para resolver este problema?

a)

nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
vit A	35	30	60	50	27	22	0	>=	9
vit C	35	30	60	50	27	22	0	>=	19
custo	35	30	60	50	27	22	0		
solução									
	x1	x2	x3	x4	x5	x6			

b)

nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
vit A	1	0	2	2	1	2	0	>=	9
vit C	0	1	3	1	3	2	0	>=	19
custo	35	30	60	50	27	22	0		
solução									
	x1	x2	x3	x4	x5	x6			

c)

nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
vit A	9	9	9	9	9	9	0	>=	9
vit C	19	19	19	19	19	19	0	>=	19
custo	35	30	60	50	27	22	0		
solução									
	x1	x2	x3	x4	x5	x6			

Questão 4

d)

nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
vit A	9	9	9	9	9	9	0	>=	9
vit C	19	19	19	19	19	19	0	>=	19
custo	35	30	60	50	27	22	0		
solução									
	x1	x2	x3	x4	x5	x6			

e)

nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
vit A	35	30	60	50	27	22	0	<=	9
vit C	35	30	60	50	27	22	0	<=	19
custo	1	1	5	3	4	4	0		
solução									
	x1	x2	x3	x4	x5	x6			

Questão 5

5. Para o problema exposto na questão 03. Utilizando o Solver, qual seria o nutriente escolhido e o custo mínimo obtido?

a) Nutriente A, C e D com $156.

b) Nutriente B e E com $123.

c) Nutriente A, C e F com $182.

d) Nutriente A e C com $128.

e) Nutriente E e F com $179.

Gabarito

1. Resposta: C.

A função-objetivo é maximizar o lucro, logo $300x_1+400x_2$. A quantidade de caminhões fica limitada pela quantidade de horas que cada rota leva, então $1*x_1+1{,}5*x_2 \leq 50$.

2. Resposta: A.

A resposta utilizando o solver e a planilha como mostrada no exercício 1 é de 50 caminhões para a rota X1 com um lucro de $15.000.

3. Resposta: B.

A função-objetivo é minimizar o custo, logo é representada pela opção B.

4. Resposta: B.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	nutriente	A	B	C	D	E	F	Total	sinal	Limite
3	vit A	1	0	2	2	1	2	9	>=	9
4	vit C	0	1	3	1	3	2	19	>=	19
5	custo	35	30	60	50	27	22	179		
6	solução	0	0	0	0	5	2			
7		x1	x2	x3	x4	x5	x6			

5. Resposta: E.

Segundo a resolução do Solver, foi determinado que escolhendo 5 unidades do Nutriente E e 2 unidades do Nutriente F seriam as opções que gerariam o menor custo, $179, obedecendo as restrições de quantidade das vitaminas.

Unidade 8

Método multicritério de apoio a decisão, caso de avaliação da escolha de um fornecedor

Objetivos

1. Apresentar aos alunos o método Processo de Análise Hierárquica (AHP) para a escolha envolvendo critérios de seleção diversificados.

Introdução

Imagine que você precise fazer uma seleção ou escolha, que precise de muitos critérios para que seja tomada a decisão final. A utilização de uma ferramenta que possa te auxiliar neste processo é fundamental. Entretanto, fazer esta análise de forma objetiva, muitas vezes, torna-se um desafio. O uso do método AHP (Processo de Análise Hierárquica) auxilia nesse tipo de tomada de decisão e, além disso, pode ser replicado em diversos outros processos de seleção, tornando-se uma ferramenta para este tipo de solução.

1. MÉTODO PROCESSO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA- AHP

O método de Programação Linear, apresentado no Tema 6 e 7, é muito eficiente para a análise e decisão de processos que requerem um único critério para a tomada de decisão. Como você estudou, a escolha entre rotas para a entrega de um determinado produto pode ser feita com o método de Programação Linear, desde que se considere como critério para decisão apenas o tempo necessário para que o produto seja entregue. Todavia, você pode imaginar que, para um gestor de logística, devem existir outros critérios a serem considerados para esta análise como, por exemplo, as tarifas de pedágio, restrições de circulações de caminhões, entre outros, que necessitam ser consideradas para a decisão de escolha de rota (LONGARAY; ENSSLIN, 2014).

Para as análises que necessitam da utilização de diversos critérios, denominadas **análises multicritério**, recomenda-se a utilização de um método multicritério para reduzir a parcela de subjetividade e de arbitrariedade, tornando o processo mais objetivo, isento de opiniões pessoais e replicável (PAULA; MELLO, 2013 *apud* LONGARAY; BUCCO, 2014).

Corrêa (1996) *apud* Bastos et al. (2011) destaca que o uso de modelos matemáticos para o planejamento ajuda os gestores na compreensão dos problemas pois estão sustentados por dados quantitativos que permitem a comparação entre as possíveis escolhas de maneira absoluta e objetiva.

Para saber mais

Na literatura existem diversos métodos de análise multicritério, como cita Salomon (2002) *apud* Longaray e Bucco (2014):

- AHP - *Analytic Hierarchy Process*
- ANP - *Analytic Network Process*
- ELECTRE - *Elimination and Choice Translating Reality*
- FDA - *Fuzzy Decision Approach*
- MACBETH - *Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*
- TOPSIS - *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*

Cada método possibilita uma maneira de se tomar decisões objetivas para a seleção baseada em critérios. Entretanto, Ho (2008) *apud* Longaray e Bucco (2014) considera o método AHP como um excelente método para a seleção de fornecedores *"por conta de sua ampla aplicabilidade, robustez e flexibilidade".*

Bastos et al. (2011) também destacam que os setores de suprimentos necessitam de ferramentas próprias para a seleção de fornecedores, uma vez que é característico de cada empresa os critérios que devem ser levados em consideração na escolha de fornecedores. Desta forma, o método AHP apresenta, novamente, grande utilidade.

Para saber mais

O AHP foi desenvolvido por Thomas Saaty na década de 70. Caso queira conhecer seu artigo original confira no link: SAATY, R.w.. The analytic hierarchy process—what it is and how it is used. **Mathematical Modelling**, [s.l.], v. 9, n. 3-5, p.161-176, 1987.

Segundo Saaty (1991 *apud* LONGARAY; BUCCO, 2014, s.p.) menciona que o método AHP *"é modelado na forma de uma estrutura hierárquica descendente, de um objetivo geral para critérios, subcritérios e alternativas, em níveis sucessivos"*. Este autor destaca que, no primeiro nível, deve ser colocado o objetivo principal que, por sua vez, deve ser desmembrado em objetivos secundários que, da mesma forma, devem ser subdivididos por quantas alternativas de decisão forem necessárias para *"representar o problema (de decisão) da forma mais completa possível"*. O autor também destaca a atenção que se devem dar as possíveis perdas de sensibilidade às mudanças de critérios, dentro da organização, e que devem ser levadas ao modelo de análise sempre que necessário.

Decorrida a escolha do objetivo principal e dos critérios que permitam descrever a decisão da maneira mais objetiva possível, deve-se proceder ao julgamento dos critérios, avaliação de sua consistência e síntese de prioridades (SAATY *apud* LONGARAY; BUCCO, 2014).

Saaty (1991) *apud* Longaray e Bucco (2014) sugere que os critérios devam ser julgados por meio de comparação par a par, utilizando uma escala, conforme mostra a Tabela 8.

Tabela 8: Escala fundamental de Saaty.

Intensidade de importância numa escala absoluta	Definição
1	Igual importância
3	Moderada importância de um sobre o outro
5	Importância essencial ou forte
7	Importância muito forte
9	Importância extrema
2, 4, 6, 8	Valores intermediários entre dois julgamentos adjacentes
Recíprocos	Se a atividade *i* tem um dos números acima quando comparada com a atividade *j*, então a atividade *j* tem o valor recíproco quando comparada a *i*.

Fonte: Saaty (1991) apud Longaray e Bucco (2014, p.7)

Esta comparação deve ser organizada na forma de uma matriz de comparação, conforme mostra a Figura 27.

Figura 27: Matriz recíproca genérica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/a_{n1} & 1/a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: Ramos Filho e Marçal (2010) apud Longaray e Bucco (2014, p.7)

As matrizes de comparação devem ser ajustadas para que se tenha o nível correto de priorização relativo a cada um dos critérios. Conforme define Colin (2007, *apud* LONGARAY; BUCCO, 2014, s.p.), *"as prioridades deverão ser números entre 0 e 1, e sua soma deve ser 1. Repete-se esse processo para cada conjunto de critérios, em todos os níveis da estrutura"*.

Sequencialmente, você precisa analisar a coerência dos critérios de julgamento escolhidos pelo decisor. Conforme Saaty (1990) *apud* Longaray e Bucco (2014) afirma que, para que as matrizes de julgamento sejam consistentes, seu autovalor λ_{max} deve ser igual a *n*, onde *n* é a ordem da matriz. Para compreender melhor, uma matriz deverá ser considerada inconsistente se seu autovalor λ_{max} é maior que *n*, e pode ser obtida pela subtração $\lambda_{max} - n$. Além disso, o mesmo autor propõe um quociente de consistência (CR – *Consistency Ratio*), que pode ser calculado pela Equação 25.

Equação 25: Quociente de consistência.

$$CR = \frac{(\lambda_{max-n})}{(n-1)RI}$$

Fonte: Saaty (1990) apud Longaray e Bucco (2014, p.8)

Para saber mais

Em álgebra linear, valor λ é chamado autovalor se existir um vetor x, diferente de zero, tal que $A \cdot x = \lambda \cdot x$, para uma matriz A quadrada nxn, então x é chamado de autovetor. A funcionalidade matemática está em que a matriz pode ser "substituída" por um único valor escalar λ.

Finalmente, o índice RI (*Random Consistency Index*) pode ser calculado através da média de *"um grande número de matrizes recíprocas de mesma ordem, cujas entradas são aleatórias."* (SAATY (1990) apud LONGARAY; BUCCO, 2014, p.8). Este mesmo autor sugere que o quociente CR deva ser inferior a 0,2 e, em casos que este valor esteja maior, os critérios de julgamento devem ser revisados. A Tabela 9 mostra valores de RI para matrizes de ordem 3 a 10.

Tabela 9: Índice de consistência aleatória.

Ordem da matriz (n)	RI
3	0,52
4	0,89
5	1,11
6	1,25
7	1,35
8	1,40
9	1,45
10	1,49

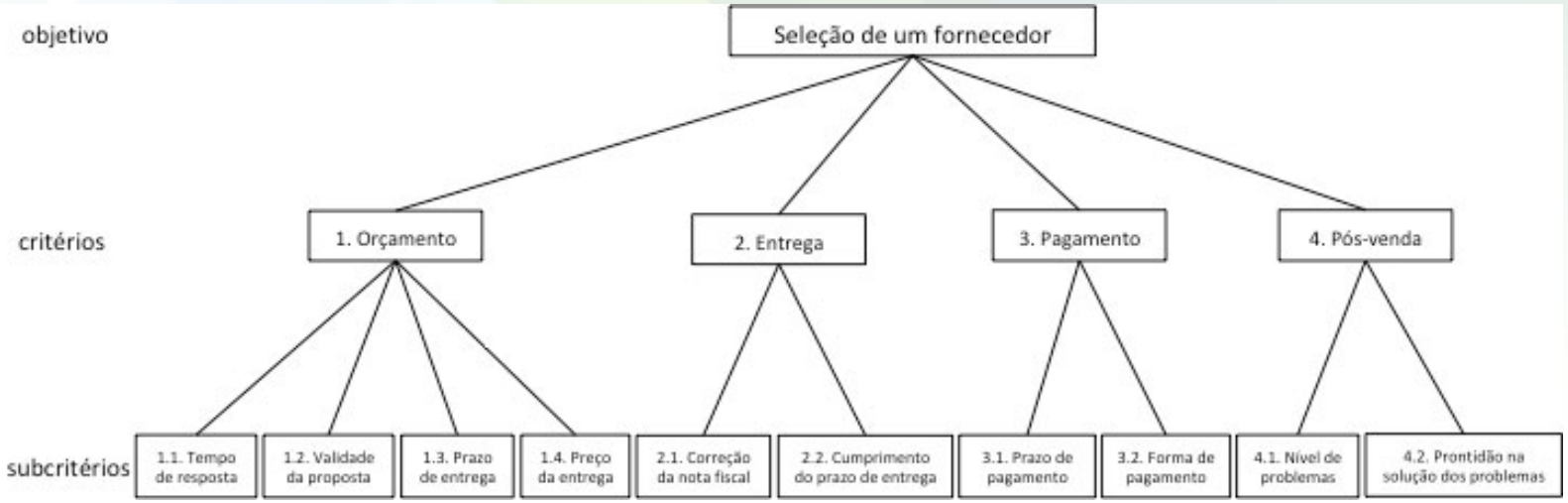
Fonte: Salomon (2004) apud Longaray e Bucco (2014, p.8)

2. UTILIZAÇÃO DO MÉTODO AHP PARA SELEÇÃO DE FORNECEDORES

Você vai agora aprender aplicar o método AHP em um estudo de caso para a seleção de fornecedores. Revisando, o método AHP tem por objetivo tornar objetivos os processos de seleção baseados em critérios múltiplos, pois, muitas vezes, esses mesmos processos são realizados de forma subjetiva, dificultando sua replicabilidade e mensuração.

Conforme descrito nesta mesma aula, o primeiro procedimento a ser realizado é colocar o objetivo principal no primeiro nível, derivando os critérios de apoio a este objetivo em níveis menores, até o nível necessário para a correta compreensão do processo de decisão. A Figura 28 mostra uma sugestão de hierarquização de critérios para a seleção de fornecedores.

Figura 28: Hierarquia de critérios para a seleção de fornecedores.



Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.11)

Longaray e Bucco (2014 p. 12) destacam que o terceiro nível, chamado de subcritérios, é que apresenta os critérios que podem ser quantificáveis, servindo para a avaliação objetiva das alternativas de decisão.

Dessa forma, para o critério de Orçamento, foram medidos:

1. Tempo de resposta
2. Validade da proposta
3. Prazo de entrega
4. Preço de entrega

Outro critério considerado foi a Entrega, onde foram medidos:

1. Correção de nota fiscal
2. Cumprimento de prazo de entrega

O Pagamento foi outro critério a ser analisado, e foram mensurados:

1. Prazo de pagamento
2. Forma de pagamento

Finalmente, o critério de Pós-Venda foi considerado, sendo avaliado pelos itens:

1. Nível de problemas
2. Prontidão na solução de problemas

Conforme proposto pelo método AHP, foram comparadas as prioridades, ou preferências, entre os critérios do mesmo nível. Neste caso, o segundo nível. Foi utilizada a Escala de Comparação de Pares do AHP, conforme mostra a Tabela 10.

Tabela 10: Matriz de comparação dos critérios de nível 2.

Critério	Orçamento	Entrega	Pagamento	Pós-venda
Orçamento	1,00	4,00	5,00	0,25
Entrega	0,25	1,00	3,00	0,17
Pagamento	0,20	0,33	1,00	0,14
Pós-venda	4,00	6,00	7,00	1,00

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.13)

Veja na Tabela 10 que o critério de Pós-Venda foi escolhido como mais relevante que o critério de Orçamento, seguido pelo critério de Pagamento e Entrega. De acordo com Longaray e Bucco (2014, p. 13 e 14), que seja feita a análise da consistência dessa priorização, onde *"cada elemento* $a_{ij} = k$ *da matriz implica automaticamente que* $a_{ji} = k - 1$*"*. Os autores reforçam que a diagonal principal deve ser pontuada de forma que a preferência seja a mesma, conforme mostram as Tabelas 11 e 12.

Tabela 11: Comparações pareadas para subcritérios de Orçamento.

Critério	Tempo de resposta	Validade da proposta	Prazo de entrega	Preço da entrega
Orçamento	1,00	6,00	0,33	0,33
Entrega	0,17	1,00	0,14	0,25
Pagamento	3,00	7,00	1,00	5,00
Pós-venda	3,00	4,00	0,20	1,00

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.14)

Tabela 12: Comparações pareadas para os subcritérios de Entrega, Pagamento e Pós-Venda.

Critérios Entrega	**Correção da NF**	**Cumprimento do prazo**
Correção da NF	1,00	0,14
Cumprimento do prazo	7,00	1,00
Critérios Pagamento	**Prazo de pagamento**	**Forma de pagamento**
Prazo de pagamento	1,00	3,00
Forma de pagamento	0,33	1,00
Critérios Pós-venda	**Nível de problemas**	**Prontidão na solução**
Nível de problemas	1,00	4,00
Prontidão na solução	0,25	1,00

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.14)

A análise de consistência deve ser realizada para verificar se os critérios de decisão estão coerentes. Para realizar esta análise, foi utilizada a Equação 25, que calcula o Quociente de Consistência (CR) de uma matriz. O CR da Tabela 10 apresentou um valor CR = 0,086, valor abaixo do limite sugerido, indicando que há boa consistência nos critérios utilizados, assim como para as demais matrizes. (LONGARAY; BUCCO, 2014, p.15). A etapa seguinte é a normalização das matrizes, conforme mostra a Tabela 13 para os critérios de segundo nível.

Tabela 13: Matriz de comparação pareada para o nível 2 em percentual.

CRITÉRIO	Orçamento	Entrega	Pagamento	Pós-Venda	**Prioridade Relativa**
Orçamento	0,1835	0,3529	0,3125	0,1603	**25,23%**
Entrega	0,0459	0,0882	0,1875	0,1069	**10,71%**
Pagamento	0,0367	0,0294	0,0625	0,0916	**5,51%**
Pós-venda	0,7339	0,5294	0,4375	0,6412	**58,55%**
Soma	1,00	1,00	1,00	1,00	**100%**

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.15)

Neste caso, o elemento "Orçamento x Orçamento" é calculado da seguinte forma: 1/(1,00+0,25+0,20+4,00), valores de acordo com a Tabela 10. O mesmo ocorre para os demais. A Prioridade Relativa é a média das pontuações de cada linha da matriz e representa o peso relativo de cada critério no respectivo nível.

Longaray e Bucco (2014, p. 15) afirmam que, para os critérios do nível 3, foram criadas matrizes com os mesmos procedimentos. Após esta última análise, foi gerada uma função-objetivo, conforme mostra a Equação 26, "que agrega todos os critérios com suas respectivas prioridades relativas...".

Equação 26: Função-objetivo para critérios e suas prioridades relativas.

$$V_x = \sum_{i \epsilon N} w_i \, . \vartheta_i \; (x)$$

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.15)

Onde:

V_x função-valor de cada *x* alternativa de decisão

N conjunto de critérios de segundo nível

w_i peso de cada *iεN* critério de segundo nível

$\vartheta_i(x)$ Função-valor de cada *iεN* critério de segundo nível, para cada *x* alternativa de decisão

As Equações 27 a 30 a seguir representam as funções-valor $\vartheta_i(x)$ de cada critério, os valores w_i correspondem à última coluna da Tabela 13.

Equação 27, 28, 29 e 30: Funções-valor dos critérios de segundo nível

$$\vartheta_1(x) = 0{,}1806 + 0{,}0505 + 0{,}5409 + 0{,}5228 \quad (27)$$

$$\vartheta_2(x) = 0{,}1250 + 0{,}8750 \quad (28)$$

$$\vartheta_3(x) = 0{,}7500 + 0{,}2500 \quad (29)$$

$$\vartheta_4(x) = 0{,}8000 + 0{,}2000 \quad (30)$$

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.16)

Com os resultados da Equações 27 a 30 e a forma de decisão da Figura 28, Longaray e Bucco (2014, p. 16) realizaram uma simulação para a seleção de três fornecedores, cujo resultado pode ser visto na Tabela 14.

Tabela 14: Pontuações para os três fornecedores.

	Fornecedor		
Critérios	A	B	C
1.1	0,0911	0,1823	0,1367
1.2	0,0255	0,0255	0,0255
1.3	0,5459	0,5459	0,6824
1.4	0,1726	0,1726	0,0575
2.1	0,0402	0,0402	0,0402
2.2	0,1875	0,4686	0,3749
3.1	0,1239	0,1239	0,0826
3.2	0,0275	0,0413	0,0413
4.1	2,3421	1,8737	1,4052
4.2	0,3513	0,4684	0,3513

Fonte: Longaray e Bucco (2014, p.16)

Como conclusão, Longaray e Bucco (2014, p. 18) destacam que, com o objetivo de maximizar a função-objetivo, o fornecedor B deverá ser selecionado, pois foi este que apresentou a maior pontuação: este fornecedor apresenta *"o maior potencial para fornecer produtos nas quantidades e especificações corretas, em um tempo curto e com menor índice de transtornos..."* de acordo com os critérios elencados pelo gestor de seleção de fornecedores.

Glossário

Decisão multicritério: como na escolha de um fornecedor, é uma decisão que envolve mais do que um critério para a escolha da melhor opção.

Função-Objetivo: feita para maximizar ou minimizar uma variável desejada.

Função-Valor: equação que pondera os pesos dados aos critérios para maximizar a função-objetivo.

Questão para reflexão

Você aprendeu que algumas decisões empresariais podem requerer a seleção da melhor escolha tendo diversos critérios a serem considerados. Quais são as vantagens do uso de ferramentas como o AHP para o processo de decisão?

Considerações Finais

- Decisões multicritérios requerem o uso de ferramentas que minimizem a subjetividade do processo;
- A redução de subjetividade permite fazer escolhas mais assertivas e objetivas, além de poder ser mensurada e padronizada;
- A metodologia utilizada inclui a construção de uma função-objetivo e de pelo menos uma função-valor.

Referências

LONGARAY, A. A., BUCCO, G. B. Uso Da Análise De Decisão Multicritério Em Processos Licitatórios Públicos: Um Estudo De Caso. Revista Produção Online, Florianópolis, v.14, n.1, p. 219-241, 2014.

LONGARAY, A. A.; ENSSLIN, L. Uso da MCDA na identificação e mensuração da performance dos critérios para a certificação dos hospitais de ensino no âmbito do SUS. Revista Produção. v.24 n.1 São Paulo, Jan./Mar. 2014 Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-65132013005000021&script=sci_arttext>. Acesso em: 6 nov. 2016.

BASTOS, A. L. A., et al., Modelo Multicritério De Apoio À Decisão Para Seleção De Fornecedores. VII Congresso Nacional de Excelência em Gestão, Rio de Janeiro, RJ, 2011.

Questão 1

1. É uma aplicação do método AHP (Processo de Análise Hierárquica):

a) Minimizar um processo baseado em restrições.

b) Realizar um Kaizen de processo.

c) Orçar o custo de um investimento.

d) Escolher a melhor rota para minimizar somente o tempo.

e) Escolher o melhor fornecedor utilizando diversos critérios de avaliação.

Questão 2

2. Por que é recomendada a utilização de um método para um processo de escolha que envolva multicritérios?

a) Porque pode reduzir a parcela de subjetividade e de arbitrariedade, tornando o processo mais objetivo, isento de opiniões pessoais e também replicável.

b) Porque utiliza métodos de cálculo matriciais complexos e objetivos.

c) Porque serve para conferir se a pessoa que está selecionando o fornecedor pode entrar no departamento de suprimentos.

d) Porque permite o uso de vetores matriciais e o módulo do vetor.

e) Porque revela o grau de subjetividade do processo seletivo de fornecedores internacionais.

Questão 3

3. O procedimento de uma análise AHP (Processo de Análise Hierárquica):

a) Cria-se a matriz de indicadores e calcula-se sua determinante, seguida pela matriz inversa.

b) Multiplica-se o coeficiente de critérios múltiplos pelo determinante da matriz inversa.

c) Somam-se os coeficientes quantificáveis da determinante inversa da matriz de ordem 3.

d) Deve-se colocar o objetivo no primeiro nível, seguido dos critérios de apoio e depois dos subcritérios quantificáveis.

e) Elegem-se os critérios quantificáveis, cria-se a matriz com seus coeficientes e calcula-se a matriz inversa.

Questão 4

4. Conforme a metodologia do método AHP (Processo de Análise Hierárquica), para critérios do mesmo nível:

a) Deve-se criar uma matriz de comparação entre os pares, revelando o critério mais relevante.

b) Deve-se elencar os pesos a serem considerados nos subscritérios, sem compará-los.

c) Calcula-se a determinante da matriz inversa dos coeficientes dos critérios quantificáveis .

d) Calcula-se o resultado absoluto da variância matricial dos critérios quantificáveis.

e) Verifica-se a necessidade de haver esses critérios, pois pode haver itens a serem excluídos, tornando a análise mais objetiva.

Questão 5

5. O resultado final de uma análise multicritério feita pelo método AHP (Processo de Análise Hierárquica) resultou na matriz abaixo. Qual fornecedor deverá ser selecionado?

	Fornecedor	
Critérios	A	B
1	0,0402	0,19196
2	0,6234	0,07532
3	0,0213	0,19574
4	0,0053	0,19894
5	0,1274	0,17452
6	0,0982	0,18036

a) O fornecedor A.

b) O fornecedor B.

c) Ambos.

d) Nenhum deles.

e) Não há informações, é necessária nova análise.

Gabarito

1. Resposta: E.

O método AHP (Processo de Análise Hierárquica) é utilizado para análises multicritério.

2. Resposta: A.

Os métodos multicritérios podem ser padronizáveis de acordo com a necessidade do negócio.

3. Resposta: D.

Confirme a Figura 28 do Tema 08, os subcritérios quantificáveis são os últimos itens que subsidiam a decisão de escolha.

4. Resposta: A.

A matriz de comparação permite classificar os critérios em ordem de prioridade.

5. Resposta: B.

A soma dos critérios do fornecedor B é maior do que o fornecedor A.